∽ Baccalauréat Série mathématiques ∾
Métropole septembre 1961 [1]

EXERCICE 1

Déterminer les solutions de l'équation trigonométrique

$$\sin x - \sin 5x = \sqrt{3}\cos 3x$$

comprises entre 0 et 2π.
(L'usage des tables n'est pas nécessaire.)

EXERCICE 2

Partie A

On donne deux axes perpendiculaires $x'\mathrm{O}x$ et $y\mathrm{O}y$ $\left[\left(\overrightarrow{\mathrm{O}x},\ \overrightarrow{\mathrm{O}y}\right) = \dfrac{\pi}{2}\right]$, munis de vecteurs unitaires de même longueur, et plusieurs points définis par leurs coordonnées :

$$\mathrm{A}(x = a,\ y = 0),\quad \mathrm{B}(x = 0,\ y = a),\quad \mathrm{C}(x = a,\ y = a),\quad \mathrm{I}(x = a,\ y = \beta),\quad \mathrm{J}(x = \alpha,\ y = a),$$

a étant un nombre positif constant, α et β deux nombres positifs, négatifs ou nuls.
On désigne par (I) le cercle de centre I tangent à Ox et par (J) le cercle de centre J tangent à Oy.

1. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les cercles (1) et (J) soient orthogonaux est que l'on ait

$$(1) \qquad \alpha + \beta = a.$$

2. Montrer que, si la relation (1) est satisfaite, il existe une rotation (dont on précisera l'angle et le centre, S) transformant le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ en le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CJ}}$.
   En déduire que la médiatrice du segment IJ passe par un point fixe.
3. Les nombres α et β varient en restant liés par la relation (1). Montrer que le point M de coordonnées $(x = \alpha,\ y = \beta)$ appartient aux cercles (I) et (J) et à la droite AB.
   Trouver le lieu des points d'intersection, M et P, des cercles (I) et (J), et le lieu du milieu du segment IJ.
4. Transformer dans l'inversion de pôle A et de puissance AB^2 les droites $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$ et les cercles (I) et (J).
   Retrouver ainsi les lieux des points d'intersection des cercles (I) et (J).

Partie B

On considère maintenant un triangle fixe quelconque AOB. On désigne par (I) un cercle variable tangent au point A à la droite OA et par (J) un cercle variable tangent au point B à la droite OB et orthogonal au cercle (I).
Comment faut-il choisir le triangle OAB pour que le lieu des points d'intersection des cercles (I) et (J) comprenne une droite ?

1. Israël