

♧ Baccalauréat Série mathématiques ♧

Métropole septembre 1961¹

EXERCICE 1

Déterminer les solutions de l'équation trigonométrique

$$\sin x - \sin 5x = \sqrt{3} \cos 3x$$

comprises entre 0 et 2π .

(L'usage des tables n'est pas nécessaire.)

EXERCICE 2

Partie A

On donne deux axes perpendiculaires $x'Ox$ et yOy , $\left[\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}\right) = \frac{\pi}{2}\right]$, munis de vecteurs unitaires de même longueur, et plusieurs points définis par leurs coordonnées :

$$A(x = a, y = 0), \quad B(x = 0, y = a), \quad C(x = a, y = a), \quad I(x = a, y = \beta), \quad J(x = \alpha, y = a),$$

a étant un nombre positif constant, α et β deux nombres positifs, négatifs ou nuls.

On désigne par (I) le cercle de centre I tangent à Ox et par (J) le cercle de centre J tangent à Oy .

1. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les cercles (I) et (J) soient orthogonaux est que l'on ait

$$(1) \quad \alpha + \beta = a.$$

2. Montrer que, si la relation (1) est satisfaite, il existe une rotation (dont on précisera l'angle et le centre, S) transformant le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en le vecteur $\overrightarrow{CJ}$.

En déduire que la médiatrice du segment IJ passe par un point fixe.

3. Les nombres α et β varient en restant liés par la relation (1). Montrer que le point M de coordonnées $(x = \alpha, y = \beta)$ appartient aux cercles (I) et (J) et à la droite AB.

Trouver le lieu des points d'intersection, M et P, des cercles (I) et (J), et le lieu du milieu du segment IJ.

4. Transformer dans l'inversion de pôle A et de puissance AB^2 les droites $x'Ox$ et $y'Oy$ et les cercles (I) et (J).

Retrouver ainsi les lieux des points d'intersection des cercles (I) et (J).

Partie B

On considère maintenant un triangle fixe quelconque AOB. On désigne par (I) un cercle variable tangent au point A à la droite OA et par (J) un cercle variable tangent au point B à la droite OB et orthogonal au cercle (I).

Comment faut-il choisir le triangle OAB pour que le lieu des points d'intersection des cercles (I) et (J) comprenne une droite?

1. Israël