Durée : 4 heures

Baccalauréat C Métropole groupe 3 [1] juin 1992

EXERCICE 1 **5 points**

Dans le plan orienté, ABC désigne un triangle rectangle isocèle en A, avec $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
Le point I est le point de concours des bissectrices intérieures du triangle ABC. On désigne par : r_{A} la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, r_{C} la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$

1. **a.** Construire le point A′, image de A par r_{C}.

   b. Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'application composée $r_{\text{C}} \circ r_{\text{A}}$ (on pourra écrire chaque rotation comme composée de réflexions convenablement choisies).

   c. Montrer que IA′ = IA et que les droites (IA′) et (AB) sont parallèles.

2. La droite (CI) coupe (AB) en E ; les droites (A′E) et (BI) se coupent en K.

   On désigne par h_{C} l'homothétie de centre C et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, par h_{K} l'homothétie de centre K et de rapport $-\sqrt{2}$.

   a. Déterminer $h_{\text{C}}(\text{B})$ et $h_{\text{C}}(\text{E})$.
   En déduire que $\overrightarrow{\text{BE}} = -\sqrt{2}\overrightarrow{\text{IA}'}$.

   b. Quelle est l'image de B par $h_{\text{K}} \circ h_{\text{C}}$?

   c. Reconnaître l'application $h_{\text{K}} \circ h_{\text{C}}$ et en déduire que les points C et K sont alignés avec le milieu M du segment [BE].

EXERCICE 2 **4 points**

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. L'unité graphique est de 2 cm.
On considère la parabole (P) de foyer O et de directrice la droite (D) d'équation $x = 1$.

1. Écrire une équation de (P) et dessiner (P).

2. Soit M un point de (P), H le projeté orthogonal de M sur (D), I le milieu du segment [OH], A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe 2.
   Montrer que $\left(\overrightarrow{\text{MI}},\ \overrightarrow{\text{MH}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{HO}},\ \overrightarrow{\text{HA}}\right) + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
   En déduire que $\left(\overrightarrow{\text{MO}},\ \overrightarrow{\text{MH}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{HO}},\ \overrightarrow{\text{HB}}\right) + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

3. On choisit $\theta \in [0\ ;\ 2\pi[$, tel que $\left(\overrightarrow{\text{MO}},\ \overrightarrow{\text{MH}}\right) = \theta + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
   On désigne par z et h les affixes respectives de M et H.
   Montrer que $\dfrac{z-h}{z} = \dfrac{h-2}{h} = \text{e}^{\text{i}\theta}$, et que θ est différent de zéro.
   En déduire que $z = \dfrac{2}{\left(1-\text{e}^{\text{i}\theta}\right)^2}$.

1. Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) &=& \dfrac{\ln x}{x-\ln x} \quad \text{si } x>0,\\ f(0) &=& -1\end{array}\right.$$

(ln désigne le logarithme népérien).

On note $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est de 2 cm.

Partie A
Étude d'une fonction auxiliaire (pour la partie C)

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x - \ln x - 1.$$

1. Étudier le sens de variation de g.
2. En déduire que $g(x) \geqslant 0$, pour tout x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie B
Étude de *f*

1. Montrer que la fonction f est continue en 0.
   Montrer que f est dérivable en 0 : on précisera la valeur de sa dérivée en 0.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variations.
4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

Partie C
Étude d'une primitive de *f*

On pose, pour tout $x \geqslant 0$:

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\text{d}t.$$

On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction F, sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
2. Montrer, en introduisant la fonction g de la partie A, que, pour tout t de de l'intervalle $]0\,;\,1]$, on a :

   $$-1 \leqslant f(t) \leqslant t-1.$$

   Vérifier que cette double inégalité est encore vraie pour $t=0$.
   En déduire que $\dfrac{1}{2} \leqslant F(0) \leqslant 1$.
3. **a.** Prouver que pour tout $t \geqslant 1$, on a :

   $$\frac{\ln t}{t} \leqslant f(t).$$

b. Calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$.

En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

4. On note (u_n) la suite définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, on a :

$$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n).$$

(on pourra utiliser le sens de variation de f).

b. Montrer que la suite (u_n) converge vers zéro.

5. On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:

$$S_n = \sum_{p=1}^{p=n-1} u_p = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1}.$$

a. Exprimer S_n à l'aide de F.

b. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.