**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat C Métropole groupe 1 [1] juin 1993

**EXERCICE 1** **4 points**

**Enseignement obligatoire**

1. **a.** Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique réelle de premier terme $r_0$ strictement positif et de raison $\dfrac{2}{3}$.

   Exprimer $r_n$ en fonction de $r_0$ et de $n$.

   **b.** Soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite arithmétique réelle de premier terme $\theta_0$ appartenant à l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et de raison $\dfrac{2}{3}\pi$.

   Exprimer $\theta_n$ en fonction de $\theta_0$ et de $n$.

   **c.** Pour tout entier naturel $n$, on pose $z_n = r_n\left(\cos\theta_n + \mathrm{i}\sin\theta_n\right)$.

   Sachant que $z_0,\ z_1$ et $z_2$ sont liés par la relation $z_0z_1z_2 = 8$, déterminer le module et un argument de $z_0,\ z_1$ et $z_2$.

2. Dans le plan complexe $P$ muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, (unité graphique : 4 cm), on appelle $M_n$ le point d'affixe $z_n$.

   **a.** Placer les points $M_0,\ M_1,\ M_2$ et $M_3$ dans le plan $P$.

   **b.** Pour tout entier naturel $n$, calculer $\left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\|$ en fonction de $n$.

   **c.** On pose

   $$\ell_n = \sum_{k=0}^{n}\left\|\overrightarrow{M_kM_{k+1}}\right\|.$$

   Calculer $\ell_n$ en fonction de $n$ et déterminer la limite de $\ell_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**EXERCICE 2** **4 points**

**Enseignement de spécialité**

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \frac{\pi}{2} \mod 2\pi \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\mathrm{BC}},\,\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right) = \frac{\pi}{3} \mod 2\pi.$$

Soit I le symétrique de A par rapport au milieu de [BC] et H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

1. Soit $S_1$ la similitude directe de centre A qui transforme H en B.

   **a.** Déterminer les éléments caractéristiques de $S_1$.

   **b.** Montrer que $S_1(\mathrm{C}) = \mathrm{I}$. En déduire l'image de la droite (BC) par $S_1$

2. Soit $S_2$ la similitude directe de centre A qui transforme B en C,

   **a.** Déterminer l'image de la droite (BI) par $S_2$

   **b.** Soit $M$ un point de (BI), $M'$ son image par $S_2$ On suppose que $M$ et $M'$ sont distincts de I.

   Montrer que les quatre points (A, $M$, I, $M'$) sont cocycliques,

1. Amiens-Créteil-Lille-Paris-Rouen-Versailles

**EXERCICE 3** **4 points**
**Enseignement de spécialité**

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Soit (E) la conique d'équation :

$$16x^2 + 25y^2 = 400.$$

1. Préciser la nature de (E), son centre, ses foyers et ses sommets, puis tracer la conique (E).
2. Le réel $\theta$ décrit l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$, soit $M$ le point du cercle de centre O et de rayon 5, de coordonnées $(5\cos\theta\,;\,5\sin\theta)$.

   $N$ est l'image de $M$ par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

   Au point $M$ on associe le point $R$ de la conique (E) qui a même abscisse que $M$ et dont l'ordonnée a même signe que celle de $M$. Puis, au point $N$ on associe le point $S$ de la conique (E) qui a même abscisse que $N$ et dont l'ordonnée a même signe que celle de $N$.

   **a.** Donner les coordonnées de $N$, $R$ et $S$.

   **b.** Vérifier que $\text{O}R^2 + \text{O}S^2 = 41$.

   **c.** Calculer l'aire du triangle O$RS$.

**PROBLÈME** **12 points**

**PARTIE A**

1. On considère la fonction numérique $g$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$par :

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x.$$

   **a.** Dresser le tableau des variations de $g$.

   **b.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\lambda$ telle que $1,89 < \lambda < 1,90$.

   **c.** Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$.

2. On considère la fonction numérique $f$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}.$$

   **a.** Dresser le tableau des variations de $f$.

   **b.** Vérifier que

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\lambda^2}.$$

   En déduire un encadrement de $f(\lambda)$ d'amplitude $2 \cdot 10^{-3}$.

   **c.** Tracer la représentation graphique de $f$ dans un plan rapporté à un repère orthogonal en adoptant 2 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 20 cm pour unité sur l'axe des ordonnées.

**PARTIE B**

On considère la fonction numérique $F$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**1.** Montrer que $F$ est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et préciser $F'(x)$.
En déduire le sens de variation de $F$.

**2.** **a.** Vérifier que pour $t \geqslant 1$ on a :

$$\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leqslant f(t) \leqslant \frac{\ln t}{t^2}.$$

**b.** Pour $x > 0$ on pose :

$$I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(x)$.
À l'aide d'une intégration par parties et de l'égalité :

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \text{ pour } t > 0, \text{ calculer } J(x).$$

**c.** Déduire de ce qui précède que, pour $x > 1$, on a :

$$\ln 2 + \ln \frac{x}{x+1} - \frac{\ln x}{x+1} \leqslant F(x) \leqslant 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}.$$

**d.** On admet que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = \ell$.
Sans calculer $\ell$, vérifier que, $\ln 2 \leqslant \ell \leqslant 1$.

**3.** Soit $G$ la fonction numérique définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$G(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) - F(x).$$

**a.** Calculer $G'(x)$ pour $x > 0$.

**b.** Vérifier que pour tout $x > 0$, $G(x) = 0$.

**c.** Déduire de ce qui précède la limite de $F$ en 0.