

∞ Baccalauréat mathématiques élémentaires ∞
Métropole juin 1964

EXERCICE 1

1. Simplifier l'expression

$$\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}, \quad x \text{ réel.}$$

2. Donner les intervalles de définition de la fonction y telle que

$$y = \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$$

3. Cette fonction peut-elle prendre la valeur 0, la valeur 1 ?

EXERCICE 2

On donne un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$ et, sur $x'Ox$, deux points fixes A et B :

$$\overline{OA} = a, \quad \overline{OB} = -a, \quad a > 0.$$

Deux points M et P varient sur $x'Ox$, liés par la relation $\overline{AM} \cdot \overline{BP} = -4a^2$. On pose

$$\overline{AM} = x, \quad \overline{MP} = z.$$

- Exprimer z au moyen de a et x ; étudier la variation de z , la variable indépendante étant x ; construire son graphe.
En déduire, sans calcul, le nombre des points M tels que la distance MP soit égale à d , suivant la valeur du nombre arithmétique donné d .
- Sur la demi-droite Oy , on envisage le point fixe C, $\overline{OC} = b > 0$.
Évaluer, au moyen de a , b , x , les pentes des droites CM et CP, puis la tangente de l'angle de droites

$$(CM, CP) = \varphi + k\pi, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Montrer qu'il existe un point C, et un seul, pour lequel $\tan \varphi$ est indépendant de x ; quel est alors cet angle φ ?

- On suppose le triangle ABC équilatéral; on appelle (Ω) son cercle circonscrit, de centre ω .
Les droites CM et CP recoupent respectivement le cercle (Ω) en deux points, M' et P' ; déterminer l'enveloppe (E) de la droite $M'P'$ quand M décrit $x'Ox$.
On fait l'inversion de pôle C qui échange (Ω) et $x'Ox$; déterminer l'inverse de (E) et l'inverse du cercle (Γ) circonscrit au triangle CMP; en déduire le lieu du centre de (Γ) .

N. B. - Toutes les figures seront faites avec précision, en prenant $a = 2$ cm.