∽ Baccalauréat mathématiques élémentaires ∾ Métropole juin 1963

EXERCICE 1

Trouver les nombres complexes $z = x + \text{i}y$ tels que

$$z^2 = 7 - 24\text{i}.$$

EXERCICE 2

On donne un repère orthonormé $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$ et le cercle (O) de centre O et de rayon R.

1. On appelle (C) tout cercle ayant comme diamètre une corde PQ du cercle (O) ; on appelle C le centre d'un tel cercle, et ρ son rayon.

   Montrer que (C) est caractérisé par cette propriété : la puissance de son centre C, par rapport au cercle (O) et $-\rho^2$.
2. On suppose dans la suite du problème que le centre C appartient à $x'\text{O}x$ et l'on pose $\overline{\text{OC}} = \lambda$.
   - **a.** Former l'équation qui détermine λ quand (C) passe par un point donné, S, de coordonnées $x,\ y$.

     Montrer que le problème admet une solution unique si S appartient à une ellipse (E), qu'on obtiendra par son équation et dont on précisera les sommets et les foyers.

     Dans quelle région, délimitée par l'ellipse, doit se trouver S pour que le problème admette deux solutions ?
   - **b.** On se place dans le cas où le problème admet deux solutions, (C_1) et (C_2), d'abscisses λ_1 et λ_2, et l'on demande que les cercles (C_1) et (C_2) soient orthogonaux.

     Former une équation des points S correspondants et préciser la nature et les éléments de cet ensemble.
3. Parmi les cercles (C) dont le centre C est sur $x'\text{O}x$, on se borne désormais à ceux, en outre, qui coupent $y'\text{O}y$.
   - **a.** Préciser l'ensemble des centres C de ces cercles.
   - **b.** Soient I et J les points où (C) coupe $y'\text{O}y$ U et V les symétriques de I et J par rapport au diamètre PQ, U$'$ et V$'$, les points où IU et JV coupent respectivement le cercle (O) ; montrer que $\overline{\text{IU}}$ et $\overline{\text{IU}'}$ gardent un rapport constant ; reconnaître l'ensemble des points U et V.
   - **c.** Montrer que les tangentes en U à (C) et en U$'$ à (O) se coupent en un point de $y'\text{O}y$; quelle propriété en résulte-t-il pour les cercles (C) de cette question 3 ?