Durée : 4 heures

Baccalauréat C Métropole remplacement septembre 1992

EXERCICE 1 **4 points**

Soit f la fonction définie pour $x > \dfrac{1}{2}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2x-1}.$$

1. Démontrer que, pour tout $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant 1$.

On peut donc définir la suite $u = (u_n)$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & f\left(u_n\right), \text{ pour tout entier naturel } n \end{array}\right.$$

On se propose, dans la suite de l'exercice, d'exprimer u_n en fonction de n.

2. On considère les suites $v = (v_n)$ et $w = (w_n)$ telles que, pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \quad \text{et} \quad w_n = \ln\left(v_n\right).$$

(ln désigne le logarithme népérien).

a. Vérifier que v_n et w_n sont définies pour tout entier naturel n.

b. Démontrer que la suite w est une suite géométrique.

c. Exprimer, pour tout entier naturel n, w_n puis v_n en fonction de n et en déduire que :

$$u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}.$$

En déduire la limite de la suite u.

EXERCICE 2 **5 points**

On donne, dans le plan orienté, un triangle isocèle OAO′ avec $\left(\overrightarrow{\text{AO}}, \overrightarrow{\text{AO}'}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Les cercles C et C' passant par A et de centres respectifs O et O′ se recoupent en B.

On note I le centre du carré AOBO′.

On présentera les données sur une figure que l'on complètera progressivement.

1. D et D′ étant les points diamétralement opposés à A sur les cercles C et C' respectivement, démontrer, à l'aide d'une homothétie de centre A, que les points D, B et D′ sont alignés.

2. Soit M un point du cercle C (M ≠ A, M ≠ B) et M′ l'intersection de la droite (MB) avec le cercle C',

a. Vérifier que M′ est distinct de A, puis démontrer que :

$$\left(\overrightarrow{\text{AM}}, \overrightarrow{\text{AM}'}\right) = \left(\overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AD}'}\right) + k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

b. En déduire que la rotation r de centre A qui transforme O en O’ transforme la droite (AM) en la droite (AM′).

c. Prouver que r transforme M en M$'$.

3. Soit N le point d'intersection de la droite (M$'$A) avec le cercle C. Soit N$'$ le point d'intersection de la droite (MA) avec le cercle C'. Démontrer que N$'$ est l'image de N par la rotation r.

4. On suppose que M est distinct de D.

a. Prouver que N est distinct de A. On construit alors le carré NAN$'$F.

b. Montrer que les points B et F sont les images respectives des points O et N par une similitude directe s dont on précisera le centre, le rapport et l'angle.

c. Construire l'image du cercle C par s.

PROBLÈME **11 points**

Dans la première partie du problème on étudie une fonction f, dont on appelle C la courbe représentative dans un repère orthonormal.
Dans les deuxième et troisième parties on construit l'image de C par des transformations du plan.
La dernière partie a pour objet l'étude de l'effet de ces transformations sur les aires.

Partie A

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} f(x) & = & 2x(1-\ln x), \text{ pour } x>0,\\ f(0) & = & 0.\end{array}\right.$$

(ln désigne le logarithme népérien.)

1. a. Calculer la dérivée f', de f sur $[0\,;\,+\infty[$. En déduire les variations de !

b. Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

c. Montrer que la fonction f est continue en zéro. La fonction f est-elle dérivable en zéro ?

d. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

2. On note C la courbe représentative de la fonction f

a. On note N le point de C d'abscisse 1, R le point d'intersection de C et de l'axe des abscisses, Q le point de C où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 2x$.

Calculer les coordonnées des points N, R, Q et donner les coefficients directeurs des tangentes à C, en chacun de ces points.

b. En adoptant 4 cm pour l'unité et en plaçant l'axe des ordonnées à 6 cm du bord gauche de la feuille, construire C, ainsi que les tangentes à C en N, R et Q.

Partie B

1. Soit T_1 l'application de P dans P qui au point $M(x\,;\,y)$ d'affixe z, $z = x+\text{i}y$, associe le point M_1 d'affixe $z_1 = \overline{z}$, où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.

a. Quelle est la nature géométrique de T_1 ?

b. On appelle C_1 l'image de C par T_1. Représenter C_1 sur le même dessin que C.

2. Soit T_2 l'application de P dans P qui au point M d'affixe z associe le point M_2 d'affixe $z_2 = -\dfrac{1}{\text{e}^2}\overline{z}$.

a. Montrer que T_2 est la composée de T_1 et d'une homothétie que l'on précisera.

b. Déterminer les coordonnées N_2 et R_2 images de N et R par T_2. Placer N_2 et R_2 sur la figure.

c. Calculer en fonction de x et y, les coordonnées $\left(x_2\ ;\ y_2\right)$ du point M_2 image de M par T_2 puis exprimer x et y en fonction de x_2 et y_2.

d. Soit $C_2 = T_2(C)\cdot$
Montrer que C_2 est la courbe représentative de la fonction f_2 définie sur $]-\infty\ ;\ 0[$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_2(x) & = & 2x[1+\ln(-x)],\ \text{si}\ x<0,\\ f_2(0) & = & 0.\end{array}\right.$$

e. Représenter la courbe C_2 sur le même dessin que C.

Partie C

1. Soit a un nombre de l'intervalle $]0\,;\,\text{e}[$.
Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale

$$I = \int_a^{\text{e}} x\ln x\,\text{d}x$$

.

2. En déduire la valeur de $A = \displaystyle\int_a^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x$. Que représente A ?

3. Montrer que A admet pour limite $\dfrac{\text{e}^2}{2}$ quand a tend vers zéro. On admettra que cette limite représente l'aire du domaine limité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \text{e}$.

4. Déduire des questions précédentes l'aire en cm^2 du domaine limité par C_1 et l'axe des abscisses, puis celle du domaine limité par C_2 et l'axe des abscisses. Donner une valeur approchée au cm^2 près de chacune de ces aires.