Baccalauréat C Metz–Nancy juin 1979

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Trouver les nombres complexes z tels que

$$z^2 + (1 + \mathrm{i})z + \mathrm{i} = 0.$$

2. Déduire du 1 les solutions dans $\mathbb{C}$ des trois équations suivantes :
   a. $z^2 + (1 - \mathrm{i})z - i = 0$;
   b. $1 + (1 + \mathrm{i})z + \mathrm{i}z^2 = 0$;
   c. $z^4 + (1 + \mathrm{i})z^2 + \mathrm{i} = 0$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3, et soit $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath},~\overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormé de E. On désigne par P le plan affine de E d'équation

$$x + y + z = 3,$$

et par D la droite affine passant par le point A de coordonnées $(0~;~3~;~0)$ et dirigée par $\overrightarrow{\jmath} - \overrightarrow{k}$.

1. Montrer que D est située dans P.
2. Montrer qu'il existe un unique plan affine P_1 tel que la symétrie s_{D} orthogonale d'axe D soit la composée de la symétrie s_{P} orthogonale par rapport à P par la symétrie s_{P_1} orthogonale par rapport à P_1.
   Donner une équation cartésienne de P_1.
3. Soit P_2 le plan parallèle à P_1 passant par O.
   a. Donner une équation cartésienne de P_2.
   b. Déterminer les coordonnées de l'image de A par la projection orthogonale sur P_2.
   c. Déterminer sans nouveaux calculs $s_{\mathrm{P}_2} \circ s_{\mathrm{P}_1}$ où l'on désigne par s_{P_2} la symétrie par rapport à P_2.

PROBLÈME **4 POINTS**

Partie A

Pour tout $x > 0$, on pose

$$f(x) = x - 1 - \log x,$$

où la notation $\log x$ désigne le logarithme népérien de x.

1. Tracer la représentation graphique de cette fonction dans un repère orthonormé Oxy, en précisant notamment les branches infinies.
2. Soit h un nombre réel donné tel que $0 < h \leqslant 1$.
   a. Calculer l'aire $\mathscr{A}(h)$ du domaine D_h formé des points dont les coordonnées $(x~;~y)$ vérifient les inégalités

$$h \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

b. Calculer la limite de $\mathscr{A}(h)$ quand $h > 0$ tend vers 0.

3. De l'étude de f, déduire que pour tout $x > 0$, on a l'inégalité

$$\log x \leqslant x - 1. \qquad (1)$$

Partie B

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On donne n nombres réels strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et on pose

$$\left\{\begin{array}{lcl} u & = & \dfrac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\,; \\ v & = & \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}; \\ \dfrac{n}{w} & = & \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} \end{array}\right.$$

Les nombres u, v et w sont respectivement les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique des n nombres $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

1. a. En appliquant l'inégalité (1) successivement pour

$$x = \frac{a_1}{u},\ x = \frac{a_2}{u}, \ldots, x = \frac{a_n}{u}$$

et en combinant les n inégalités obtenues, montrer que

$$v \leqslant u. \qquad (2)$$

b. Dans quel cas a-t-on $v = u$?

2. a. En remplaçant dans (2) les n nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ par leurs inverses, prouver que

$$w \leqslant v. \qquad (3)$$

b. Dans quel cas a-t-on $w = v$?

N.B. - les parties C et D ci-après sont indépendantes.

Partie C

Soit x un nombre réel supérieur à zéro. On prend $n = 2$, $a_1 = 1$ et $a_2 = x$.
Dans ce cas les inégalités (2) et (3) donnent

$$\frac{2x}{1+x} \leqslant \sqrt{x} \leqslant \frac{1+x}{2}.$$

On se propose prendre comme valeur approchée de $\sqrt{x}$ la moyenne arithmétique $m(x)$ des nombres $\dfrac{2x}{1+x}$ et $\dfrac{1+x}{2}$.

1. Pour étudier la précision de cette approximation, tracer la courbe représentative de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{x^2 + 6x + 1}{4(x+1)} - \sqrt{x},$$

pour x réel supérieur à zéro.

N.B. -Pour discuter du signe de la dérivée de g, on pourra poser $\sqrt{x} = 1 + t$ et constater que $g(x)$ passe par un minimum pour $x = 1$.

2. En déduire que, pour $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$, on a

$$0 \leqslant m(x) - \sqrt{x} \leqslant \frac{3}{1000}.$$

Partie D

1. En appliquant l'inégalité (2), montrer que, pour tout entier $n > 0$, on a l'inégalité

$$\sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

2. **a.** Par des considérations d'aires, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

b. En déduire que, pour tout entier $n > 0$, on a l'inégalité

$$\frac{n}{1+\log n} \leqslant \sqrt[n]{n!}.$$