Baccalauréat C Metz-Nancy juin 1978

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Trouver suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division de 3^n par 11.
2. En utilisant les résultats de la première question, déterminer suivant les valeurs des entiers naturels k et m, les restes de la division par 11 des deux nombres
$A = 1978^k$;
$B = 421^{5m} + 421^{4m} + 421^{3m} + 421^{2m} + 421^m$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N $(N > 1)$.
On effectue dans cette urne deux tirages au hasard avec remise (le numéro de chaque boule tirée est noté et la boule est remise dans l'urne).
On considère les variables aléatoires : X_1 prenant pour valeur le numéro de la boule tirée en premier, et X_2 prenant pour valeur le numéro de la boule tirée en second.

1. Déterminer la loi de probabilité de chacune des variables X_1 et X_2. Calculer l'espérance mathématique de X_1 et de X_2.
2. On suppose désormais que $N = 5$.
   a. Calculer et représenter graphiquement la fonction de répartition F de X.
   b. On considère la variable aléatoire $Y = X_1 + X_2$. Quelle est la loi de probabilité de Y ? Calculer l'espérance mathématique de Y ainsi que sa variance.
   c. Calculer la probabilité de l'événement $\{2 < Y < 10\}$ et comparer le résultat avec un minorant de cette probabilité obtenu en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff.

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 rapporté à une base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. On note θ l'endomorphisme nul et I l'application identique de E.
Si σ est un endomorphisme de E, on définit, pour tout entier naturel n, σ^n par :

$$\begin{array}{ll} & \sigma^0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} & \sigma^{n+1} = \sigma \circ \sigma^n \end{array}$$

Soit φ l'endomorphisme de E défini par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi\left(\vec{\imath}\right) & = & -\vec{\imath} \\ \varphi\left(\vec{\jmath}\right) & = & \vec{\imath} - \vec{\jmath} \\ \varphi\left(\vec{k}\right) & = & 2\vec{\jmath} - \vec{k} \end{array}\right.$$

1. On pose $\psi = \varphi + \mathrm{I}$. Déterminer les images par ψ, ψ^2 et ψ^3 des vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$. En déduire l'expression de φ, φ^2 puis φ^3 pour tout entier naturel n, en fonction de I et ψ.
2. En déduire que φ vérifie la relation

$$\varphi^3 + 3\varphi^2 + 3\varphi + \mathrm{I} = \theta.$$

Montrer alors que φ est bijectif et exprimer φ^{-1} en fonction de φ et de I.

3. Déterminer les vecteurs de E qui sont transformés par φ en leur opposé.

Partie B

Dans l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$, on considère le sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ engendré par les fonctions $f1$, f_2, f_3 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} f_1(x) & = & \mathrm{e}^{-x} \\ f_2(x) & = & x\mathrm{e}^{-x} \\ f_3(x) & = & x^2\mathrm{e}^{-x} \end{array} \right.$$

1. Montrer que $\left(f1,\ f_2,\ f_3\right)$ est une base de $\mathcal{E}$.

a. Montrer que la dérivée de tout élément de $\mathcal{E}$ est élément de $\mathcal{E}$.

b. On note d l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à f associe sa dérivée f'.
Montrer que d est un endomorphisme de $\mathcal{E}$ et déterminer $d\left(f_1\right)$, $d\left(f_2\right)$, $d\left(f_3\right)$.

c. Quelles sont les fonctions f de $\mathcal{E}$ qui vérifient $f' + f = 0$?

2. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{E}$ vérifiant $f(-1) = 0$. Montrer que $\mathcal{F}$ est un plan vectoriel de $\mathcal{E}$ que l'on déterminera.

3. Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{E}$ dont la courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ est tangente à la droite $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u}\right)$ au point d'abscisse -1. Vérifier que $\mathcal{G}$ est une droite vectorielle de $\mathcal{E}$, dont on donnera un vecteur directeur.

Partie C

Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x+1)^2\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé.

2. Calculer une primitive de f.

3. Soit α un nombre réel, strictement plus grand que -1. Calculer l'aire $\mathcal{A}_\alpha$ du domaine limite par la courbe (C) et les droites d'équation $y = 0$, $x = -1$, $x = \alpha$.
Montrer que, quand α tend vers l'infini, $\mathcal{A}_\alpha$ admet une limite que l'on déterminera.