

∞ Baccalauréat C Metz-Nancy juin 1978 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

1. Trouver suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division de 3^n par 11.
2. En utilisant les résultats de la première question, déterminer suivant les valeurs des entiers naturels k et m , les restes de la division par 11 des deux nombres
 $A = 1978^k$;
 $B = 421^{5m} + 421^{4m} + 421^{3m} + 421^{2m} + 421^m$

EXERCICE 2

4 POINTS

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N ($N > 1$).

On effectue dans cette urne deux tirages au hasard avec remise (le numéro de chaque boule tirée est noté et la boule est remise dans l'urne).

On considère les variables aléatoires : X_1 prenant pour valeur le numéro de la boule tirée en premier, et X_2 prenant pour valeur le numéro de la boule tirée en second.

1. Déterminer la loi de probabilité de chacune des variables X_1 et X_2 .
Calculer l'espérance mathématique de X_1 et de X_2 .
2. On suppose désormais que $N = 5$.
 - a. Calculer et représenter graphiquement la fonction de répartition F de X_1 .
 - b. On considère la variable aléatoire $Y = X_1 + X_2$.
Quelle est la loi de probabilité de Y ?
Calculer l'espérance mathématique de Y ainsi que sa variance.
 - c. Calculer la probabilité de l'évènement $\{2 < Y < 10\}$ et comparer le résultat avec un minorant de cette probabilité obtenu en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff.

PROBLÈME

12 POINTS

Partie A

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note θ l'endomorphisme nul et I l'application identique de E .

Si σ est un endomorphisme de E , on définit, pour tout entier naturel n , σ^n par :

$$\begin{aligned} \sigma^0 &= I \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \sigma^{n+1} &= \sigma \circ \sigma^n \end{aligned}$$

Soit φ l'endomorphisme de E défini par

$$\begin{cases} \varphi(\vec{i}) &= -\vec{i} \\ \varphi(\vec{j}) &= \vec{i} - \vec{j} \\ \varphi(\vec{k}) &= 2\vec{j} - \vec{k} \end{cases}$$

1. On pose $\psi = \varphi + I$. Déterminer les images par ψ , ψ^2 et ψ^3 des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$. En déduire l'expression de φ , φ^2 puis φ^3 pour tout entier naturel n , en fonction de I et ψ .
2. En déduire que φ vérifie la relation

$$\varphi^3 + 3\varphi^2 + 3\varphi + I = \theta.$$

Montrer alors que φ est bijectif et exprimer φ^{-1} en fonction de φ et de I .

3. Déterminer les vecteurs de E qui sont transformés par φ en leur opposé.

Partie B

Dans l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$, on considère le sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ engendré par les fonctions f_1, f_2, f_3 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} f_1(x) &= e^{-x} \\ f_2(x) &= xe^{-x} \\ f_3(x) &= x^2e^{-x} \end{cases}$$

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathcal{E}$.
 - a. Montrer que la dérivée de tout élément de $\mathcal{E}$ est élément de $\mathcal{E}$.
 - b. On note d l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à f associe sa dérivée f' .
Montrer que d est un endomorphisme de $\mathcal{E}$ et déterminer $d(f_1)$, $d(f_2)$, $d(f_3)$.
 - c. Quelles sont les fonctions f de $\mathcal{E}$ qui vérifient $f' + f = 0$?
2. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{E}$ vérifiant $f(-1) = 0$. Montrer que $\mathcal{F}$ est un plan vectoriel de $\mathcal{E}$ que l'on déterminera.
3. Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{E}$ dont la courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est tangente à la droite $(O, \vec{u})$ au point d'abscisse -1 . Vérifier que $\mathcal{G}$ est une droite vectorielle de $\mathcal{E}$, dont on donnera un vecteur directeur.

Partie C

Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x+1)^2 e^{-x}.$$

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé.
2. Calculer une primitive de f .
3. Soit α un nombre réel, strictement plus grand que -1 . Calculer l'aire $\mathcal{A}_\alpha$ du domaine limité par la courbe (C) et les droites d'équation $y = 0$, $x = -1$, $x = \alpha$.
Montrer que, quand α tend vers l'infini, $\mathcal{A}_\alpha$ admet une limite que l'on déterminera.