Baccalauréat C Mexico juin 1970

EXERCICE 1

Soit le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$.

1. Déterminer en fonction de x et y le module et l'argument des nombres complexes

$$z_1 = z - 4 \quad \text{et} \quad z_2 = z + 1.$$

En déduire le module ρ et l'argument θ du nombre complexe

$$Z = \frac{z-4}{z+1}.$$

2. Déterminer dans le plan complexe l'ensemble des images $m(x\,;\,y)$ des nombres z tels que
   a. $\rho = \sqrt{2}$;
   b. $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$ ou $\dfrac{3\pi}{4}$;
   c. $\rho = \sqrt{2}$ et $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$ ou $\dfrac{3\pi}{4}$.
   Dans le dernier cas, déterminer les nombres complexes z correspondants.

EXERCICE 2

Calculer la fonction dérivée de la fonction réelle f de la variable réelle positive x définie par

$$f(x) = x^n \operatorname{Log} x,$$

où Log x désigne le logarithme népérien de x et n un entier naturel non nul.
En déduire la valeur de

$$\int_1^{\mathrm{e}} x^{n-1} \operatorname{Log} x \,\mathrm{d}x.$$

PROBLÈME

Partie A

Dans un plan rapporté à un repère cartésien orthonormé $\left(x'\mathrm{O}x,\ y'\mathrm{O}y\right)$ on considère la correspondance qui au point $M(x\,;\,y)$ associe le point $M'\left(x'\,;\,y'\right)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} a' &=& \dfrac{a}{x},\\ b' &=& \dfrac{b}{y}, \end{array}\right.$$

où a et b sont deux nombres réels positifs. On désigne par $\mathcal{T}$ la transformation ponctuelle ainsi associée au couple $(a\,;\,b)$.

1. Montrer que $\mathscr{T}$ est involutive. Déterminer ses points doubles.
   Quel est l'ensemble des points M tels que $\mathscr{T}(M)$ soit défini ?
   Montrer que les courbes (Γ) et (Γ') d'équations respectives

$$xy = \sqrt{ab} \quad \text{et} \quad xy = -\sqrt{ab}$$

   sont globalement invariantes par $\mathscr{T}$.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{O}M} \cdot \overrightarrow{\text{O}M'}$.
   En déduire, lorsque M décrit le plan, que les cercles (C), de diamètre MM', restent orthogonaux à un cercle fixe (Ω) dont on déterminera le centre et le rayon.
3. Établir que l'ensemble des cercles (C) est un faisceau linéaire de cercles $(\mathscr{F})$, lorsque M décrit la courbe (Γ). Préciser la nature du faisceau $(\mathscr{F})$ et déterminer son axe radical (Δ).

Partie B

Soit $\mathscr{T}'$ la transformation associée au couple $\left(a' ; b'\right)$ et soit $\varphi = \mathscr{T}' \circ \mathscr{T}$ et $M' = \varphi(M)$.

1. Établir les relations liant x' à x et y' à y.
2. Préciser la nature de la transformation ponctuelle φ qui au point M associe le point M' dans les cas suivants :
   a. $ab' - ba' = 0$;
   b. $a = a'$;
   c. $b = b'$.
3. Déterminer analytiquement dans le cas général la figure (F') image de la figure (F) par φ dans les cas suivants :
   a. (F) est une droite D d'équation

$$ux + vy + w = 0;$$

   b. (F) est une conique à centre d'équation

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 1 = 0$$

   A et B étant positifs.

   Préciser la nature et la position de (F') suivant les valeurs de a, b, a' et b'.