Baccalauréat C Mexico juin 1968

Exercice 1

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation du plan complexe définie par

$$z' = (1-\mathrm{i})z + 4\mathrm{i}.$$

Exercice 2

En étudiant les variations de la fonction définie par

$$y(x) = \frac{x-1}{x+1} - \mathrm{e}^{-2x}$$

(dont on ne construira pas le graphe), montrer que, dans l'ensemble des nombres réels positifs, l'équation

$$(x-1)\mathrm{e}^{x} - (x+1)\mathrm{e}^{-x} = 0$$

admet une racine réelle et une seule.

Exercice 3

À un couple ordonné de vecteurs $\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{V'}$ du plan on associe le vecteur $\overrightarrow{V_1}$ défini par

$$\left(\overrightarrow{V},\ \overrightarrow{V_1}\right) = +\frac{\pi}{2} \quad (\text{mod. } 2\pi) \quad \text{et} \quad \left|\overrightarrow{V_1}\right| = \left|\overrightarrow{V}\right|.$$

Le produit scalaire $\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V'}$ sera nommé *produit aréolaire* des vecteurs $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ et noté $\overrightarrow{V} \Delta \overrightarrow{V'}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{V} \Delta \overrightarrow{V'} = -\overrightarrow{V'} \Delta \overrightarrow{V}$.
   Soit $\overrightarrow{\text{AB}} = \overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{\text{AC}} = \overrightarrow{V'}$; montrer que $\left|\overrightarrow{V} \Delta \overrightarrow{V'}\right|$ est égal au double de l'aire du triangle ABC et que $\overrightarrow{V} \Delta \overrightarrow{V'}$ est positif ou négatif, suivant que le triangle orienté ABC a le sens positif ou le sens négatif [c'est-à-dire suivant le signe de la détermination principale de $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AC}}\right)$.

   On appellera aire algébrique du triangle $\overrightarrow{\text{ABC}}$ et l'on désignera par $\overline{\text{ABC}}$ la moitié de ce produit aréolaire :

   $$\overline{\text{ABC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{AB}} \Delta \overrightarrow{\text{AC}}.$$

2. Montrer que le produit aréolaire est distributif par rapport à l'addition des vecteurs coplanaires. En déduire que, si

   $$\overrightarrow{\text{AR}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AC}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{AS}} = \overrightarrow{\text{AD}} + \overrightarrow{\text{AE}},$$

   on a

   $$\overline{\text{ARS}} = \overline{\text{ABD}} + \overline{\text{ABE}} + \overline{\text{ACD}} + \overline{\text{ACE}}.$$

3. Étant donné un triangle ABC et un point M quelconque du plan, on désigne par A$'$, B$'$, C$'$ les milieux respectifs de BC, CA, AB, par α, β, γ les projections orthogonales de M respectivement sur BC, CA, AB, par A$''$,B$''$, C$''$ les symétriques de M par rapport aux médiatrices respectives de BC, CA, AB et par O le centre et R le rayon du cercle circonscrit à ABC.

   Démontrer que les angles $\left(\overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{OA''}}\right)$, $\left(\overrightarrow{\text{OB}},\ \overrightarrow{\text{OB''}}\right)$, $\left(\overrightarrow{\text{OC}},\ \overrightarrow{\text{OC''}}\right)$ ont la même bissectrice (on pourra montrer que les triangles OAB$''$ et OBA$''$ sont directement égaux).

   En déduire que le triangle A$''$B$''$C$''$ est l'image de ABC par le produit d'une homothétie et d'une symétrie axiale.

4. Déduire des questions précédentes que

$$\text{(1)} \qquad \overline{\text{A}''\text{B}''\text{C}''} = -\frac{\text{O}M^2}{R^2}\overline{\text{ABC}}.$$

   Soit I, J et K les milieux res :pectifs de MA$''$, MB$''$, MC$''$. Montrer que

$$\text{(2)} \qquad \overline{\alpha\beta\gamma} = \overline{\text{A}'\text{B}'\text{C}'} + \overline{\text{IJK}}.$$

   (On pourra, pour cela, utiliser la relation $\overline{M\alpha} = \overline{M\text{A}'} - \overline{M\text{I}}$ et les résultats des questions 1 et 2.)
   Montrer enfin que

$$\text{(3)} \qquad \overline{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\text{O}M^2}{R^2}\right)\overline{\text{ABC}}.$$

   et en déduire l'ensemble des points M pour lesquels α, β et γ sont alignés.

NOTA - On peut traiter la question 3 avant les questions 1 et 2.