∽ Baccalauréat C Mexico juin 1971 ∾

EXERCICE 1

Résoudre l'équation suivante dans le corps des nombres complexes :

$$(z-1)^5 = (z+1)^5.$$

(Pour cela, on remarquera que $z = 1$ n'est pas solution de l'équation proposée et l'on posera

$$Z = \frac{z+1}{z-1}\,;$$

on déterminera d'abord les valeurs de Z.)

EXERCICE 2

Montrer que le nombre $17^{4n+1} + 3\,.\,9^{2n}$ est divisible par 5 pour tout n entier.

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes $(x'\mathrm{O}x,\ y'\mathrm{O}y)$. On appelle A le point de coordonnées $(-1\,;\,0)$ et B le point de coordonnées $(-2\,;\,0)$.

Partie A

1. **a.** Étudier la fonction

$$x \longmapsto y = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

   Tracer sa courbe représentative (C).

   b. En déduire l'ensemble (S) des points $(x\,;\,y)$ vérifiant la relation

$$y^2 = x^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

2. Reconnaître et tracer la courbe (H) d'équation

$$x^2 - y^2 + 2x = 0.$$

   Préciser ses éléments.

3. Soit $\mathscr{I}$ l'inversion de pôle O et de puissance 2.

   a. Établir les formules donnant les coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ du point, M', inverse de M, en fonction des coordonnées $(x\,;\,y)$ de M.

   b. Quelle est l'équation de la courbe (H') transformée dans l'inversion $\mathscr{I}$ de la courbe (H) privée de O ?

   Comparer les courbes (H') et (S).

Partie B

On note $\overrightarrow{u}$ le vecteur de composantes $(\cos\theta\,;\,\sin\theta)$, où θ est une valeur de l'intervalle ouvert $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,+\frac{\pi}{2}\right[$.

Le point A et le vecteur $\overrightarrow{u}$ définissent une droite (D).

1. Donner une représentation paramétrique de (D).

2. Démontrer que (S) et (D) ont, en plus du point A, deux points communs P$'$ et P$''$ (distincts ou confondus).
Calculer $\overrightarrow{\mathrm{AP}'} \,.\, \overrightarrow{\mathrm{AP}''}$.

3. En déduire que (S) est invariante dans une inversion $\mathscr{J}$ à préciser, et que le cercle de diamètre P$'$P$''$ appartient à un faisceau linéaire de cercles à préciser.

4. Soit $\mathscr{F}$ le faisceau linéaire des cercles tangents en O à $x'\mathrm{O}x$.

a. Écrire l'équation d'un cercle quelconque (Γ) du faisceau $\mathscr{F}$ (on appellera ω son centre).

b. (Γ) et la droite $(\mathrm{A}\omega)$ ont deux points communs, P$'$ et P$''$. Quel est l'ensemble des points P$'$ et P$''$ quand le cercle (Γ) varie dans le faisceau $\mathscr{F}$?