Baccalauréat C Mexico juin 1973

EXERCICE 1

1. Calculer $\displaystyle\int_0^x t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, où x est un nombre réel et t une variable réelle.
   (On pourra utiliser deux fois la formule d'intégration par parties.)
2. Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2\mathrm{e}^x$.
   Quelle est la limite de f quand x tend vers $-\infty$? (On pourra poser $x = -2x'$.)
3. Étudier les variations de la fonction f.
   Construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthogonal où les vecteurs unitaires mesurent 1 cm.
   Calculer l'aire, en centimètres carrés, du domaine plan Δ, défini par

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

EXERCICE 2

Démontrer que tout entier relatif n est tel que son carré n^2 est congru soit à 0, soit à 1, soit à 4, modulo 8.
Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation

$$(5x+3)^2 - 1 \equiv 0 \quad (\text{modulo}\, 8).$$

EXERCICE 3

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, ayant pour base $\mathcal{B} = \{e_1,\ e_2\}$

Partie A

Soit f une application de E dans E définie par les relations

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(e_1) &=& 2e_1 - 3e_2\\ f(e_2) &=& -e_1 + e_2\end{array}\right.$$

1. Montrer que f est un automorphisme de E (voir note à la fin de l'énoncé).
2. Existe-t-il des valeurs λ telles que le noyau E_λ de l'endomorphisme (voir note) $f - \lambda\mathrm{I}$ (I désigne l'application identique de E) ne soit pas réduit à $\{0\}$?
   Donner, pour chacune de ces valeurs de λ, une base de E.
3. Déterminer la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.

Partie B

On suppose que E est l'ensemble des fonctions polynômes t, de degré inférieur ou égal à 2, définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme

$$t(x) = ax^2 + (2a+b)x + b,$$

où a et b sont des nombres réels.

1. Montrer que l'addition des fonctions et la multiplication par un nombre réel munissent E d'une structure d'espace vectoriel sur R, une base particulière étant constituée par les fonctions

$$e_1 : x \longmapsto x^2 + 2x \qquad \text{et} \qquad e_2 : x \longmapsto x + 1.$$

   Déterminer le transformé par f du trinôme t_0 défini par $t_0(x) = 2x^2 + 5x + 1$.

2. On considère le sous-espace vectoriel (Δ) de E défini par $b = 3a$.
   Montrer que (Δ) est une droite vectorielle de E dont on donnera un vecteur directeur.
   Déterminer $f(\Delta)$ et $f^{-1}(\Delta)$.

Partie C

E désignant l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de base $\mathscr{B} = \{e_1,\ e_2\}$, on considère un plan affine P associé à E, un point O de P et le repère $(\text{O},\ e_1,\ e_2)$.
On définit la transformation affine T de P :

$$\text{M}(x\ ;\ y) \longmapsto T(\text{M}) = \text{M}'\left(x'\ ;\ y'\right)$$

par

$$x' = 2x - y + 1 \quad \text{et} \quad y' = -3x + y - 2.$$

1. Déterminer les points de P invariants par T.
2. Montrer que l'image T(D) d'une droite (D) est une droite.
   Existe-t-il des droites (D) parallèles à leur image T(D) ? Quelles sont-elles ?
3. Déterminer les équations de la transformation T^{-1}.
4. On considère la courbe (H) d'équation

$$6x^2 - y^2 - 1 = 0.$$

   Déterminer l'équation cartésienne de la courbe $(\text{H}') = \text{T}(\text{H})$.
   Préciser le centre, les asymptotes, les sommets de (H) et de (H′). Construire (H) et (H′).

Note. - Un endomorphisme d'un espace vectoriel est une application linéaire de cet espace dans lui-même. Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.