Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C juin 1975 Mexico ∾

EXERCICE 1

On donne l'application f du corps des nombres complexes dans lui-même :

$$z \longmapsto f(z) = z^3 - 2(1+\text{i})z^2 + 5(\text{i}-2)z + 3(7+\text{i}).$$

Déterminer l'ensemble E des nombres complexes vérifiant $f(z) = 0$ sachant qu'un nombre réel est élément de E.

EXERCICE 2

On considère la fonction f_a qui à tout x fait correspondre

$$f_a(x) = x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}, \quad a \in \mathbb{R}$$

1. Préciser le domaine de définition de f_a suivant les valeurs de a.
2. On considère maintenant a positif.
   Étudier les variations de la fonction f_a. Tracer la courbe représentative de f_2 en axes orthonormés.
   Préciser les tangentes aux points d'ordonnée nulle.
3. Déduire de l'étude précédente la courbe (C) correspondant à l'équation :

$$y^2(a+x) = x^2(a-x)$$

PROBLÈME

On rappelle que l'ensemble $\mathscr{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ des fonctions numériques, d'une variable réelle, muni de l'addition des fonctions numériques, et de la multiplication par les nombres réels, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Soit m un réel supérieur à zéro fixé. On considère alors l'ensemble E, des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = a\text{e}^{mx} + b\text{e}^{-mx} + c, \quad (\text{où } a,\ b,\ c \text{ décrivent } \mathbb{R})$$

Partie A

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$. Déterminer sa dimension. On démontrera que si l'on considère les fonctions f_1, f_2, f_3 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies pour tout x réel par :

$$f_1(x) = \text{e}^{mx}, \quad f_2(x) = \text{e}^{-mx}, \quad f_3(x) = 1$$

   la partie $\mathscr{B} = \{f_1,\ f_2,\ f_3\}$ constitue une base de E.
2. **a.** Soit f un élément de E, de composantes $(a,\ b,\ c)$ dans la base $\mathscr{B}$. Déterminer par récurrence, la dérivée n-ième $f^{(n)}$ de la fonction f $(n \geqslant 1)$.
   Démontrer que $f^{(n)}$ est un élément de E.

b. On considère l'application φ_n de E dans E, qui à tout élément f de E associe $f^{(n)} \quad (n \geqslant 1)$. Démontrer que φ_n est un endomorphisme de E. φ_n est-il un automorphisme de E?

3. On désigne par F le sous-espace vectoriel de E engendré par la partie $\mathcal{B}' = \{f_1,\ f_2\}$.

a. Démontrer que si n est pair, φ_n est la composée d'une projection sur F et d'une homothétie que l'on précisera.

b. On considère l'endomorphisme ψ_n de F, qui à tout élément f de F associe $f^{(n)} \quad (n \geqslant 1)$. Démontrer que si n est pair, ψ_n est une homothétie vectorielle, et que si n est impair, ψ_n est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une symétrie vectorielle que l'on précisera.

Partie B

1. On suppose toujours $m \neq 0$, et on considère le sous-espace vectoriel F. On désigne par F_1 l'ensemble des fonctions de F, impaires, et par F_2, l'ensemble des fonctions de F paires.

a. Démontrer que : $F = F_1 \oplus F_2$.
On démontrera l'égalité suivante :

$$a\mathrm{e}^{mx} + b\mathrm{e}^{-mx} = (a+b)\left[\frac{\mathrm{e}^{mx} + \mathrm{e}^{-mx}}{2}\right] + (a-b)\left[\frac{\mathrm{e}^{mx} - \mathrm{e}^{-mx}}{2}\right]$$

b. Déterminer dans la base $\mathcal{B}' = \{f_1,\ f_2\}$, la matrice de la projection vectorielle p_1 de F sur F_1 parallèlement à F_2 ainsi que la matrice de la projection vectorielle p_2 de F sur $F_{2'2}$ parallèlement à F_1.

2. On pose $C = p_2\left(f_2\right) \quad$ et $\quad S = p_1\left(f_1\right)$.
Démontrer pour tout x et y de $\mathbb{R}$, les égalités suivantes :

$$\begin{array}{lcl} S(0) = 0 & ; & C(0) = 1 \\ C(-x) = C(x) & ; & S(-x) = -S(x) \\ C^2(x) - S^2(x) = 1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} C(x+y) & = & C(x)C(y) + S(x)S(y) \\ S(x+y) & = & S(x)C(y) + S(y)C(x) \end{array}$$

En déduire les égalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} S(2x) & = & 2C(x)S(x) \\ C(2x) & = & C^2(x) + S^2(x) \end{array}$$