

∞ Baccalauréat C Mexico janvier 1967 ∞
Mathématiques et mathématiques et technique

I.

1. α étant un arc compris entre 0 et π (unité : le radian), on donne

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Calculer $\cos 2\alpha$ et $\cos 4\alpha$.

En déduire α .

2. x étant compris entre 0 et 2π , résoudre l'inéquation

$$\sqrt{3+2\cos x} > 2\sin x.$$

II.

Partie A

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $x'Ox, y'Oy$, on considère la transformation ponctuelle S qui, au point M de coordonnées $(x; y)$, fait correspondre le point M' de coordonnées $(x'; y')$ telles que

$$\begin{cases} x' &= -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' &= \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2}. \end{cases}$$

1. Montrer que cette transformation est involutive.
2. Déterminer l'ensemble, (Δ) , des points doubles, ainsi que l'ensemble des points I , milieux de MM' .
3. Montrer que MM' reste parallèle à une direction fixe, que l'on comparera à la direction de (Δ) .
4. Déduire de ce qui précède que S est une transformation ponctuelle simple, que l'on définira géométriquement.
5. Tracer la courbe (Γ) ensemble des points $M(x; y)$ du plan dont les coordonnées vérifient la relation

$$y = x\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{x}.$$

Quelle est la transformée de (Γ) par S ?

Partie B

On considère maintenant la transformation T qui, au point $M(x; y)$, fait correspondre le point $M'(x'; y')$ tel que

$$\begin{cases} x' &= \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' &= \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$$

1. Montrer que T a un seul point double, dont on calculera les coordonnées.
2. Comparer les longueurs de OM et de OM' .
3. θ étant un nombre réel, quel est le transformé du point M de coordonnées $(\sin \theta ; \cos \theta)$?
4. Dédire de ce qui précède que S est un déplacement, que l'on caractérisera.

Partie C

Par des considérations géométriques, déterminer les transformations composées $S \circ T$ et $T \circ S$.