

**☞ Baccalauréat C Mexico janvier 1967 ☞**  
**Mathématiques et mathématiques et technique**

**I.**

1.  $\alpha$  étant un arc compris entre 0 et  $\pi$  (unité : le radian), on donne

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Calculer  $\cos 2\alpha$  et  $\cos 4\alpha$ .

En déduire  $\alpha$ .

2.  $x$  étant compris entre 0 et  $2\pi$ , résoudre l'inéquation

$$\sqrt{3 + 2 \cos x} > 2 \sin x.$$

**II.**

**Partie A**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $x'Ox$ ,  $y'Oy$ , on considère la transformation ponctuelle  $S$  qui, au point  $M$  de coordonnées  $(x ; y)$ , fait correspondre le point  $M'$  de coordonnées  $(x' ; y')$  telles que

$$\begin{cases} x' &= -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' &= \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2}. \end{cases}$$

1. Montrer que cette transformation est involutive.
2. Déterminer l'ensemble,  $(\Delta)$ , des points doubles, ainsi que l'ensemble des points I, milieux de  $MM'$ .
3. Montrer que  $MM'$  reste parallèle à une direction fixe, que l'on comparera à la direction de  $(\Delta)$ .
4. Déduire de ce qui précède que  $S$  est une transformation ponctuelle simple, que l'on définira géométriquement.
5. Tracer la courbe  $(\Gamma)$  ensemble des points  $M(x ; y)$  du plan dont les coordonnées vérifient la relation

$$y = x \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{x}.$$

Quelle est la transformée de  $(\Gamma)$  par  $S$ ?

**Partie B**

On considère maintenant la transformation  $T$  qui, au point  $M(x ; y)$ , fait correspondre le point  $M'(x' ; y')$  tel que

$$\begin{cases} x' &= \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' &= \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$$

1. Montrer que  $T$  a un seul point double, dont on calculera les coordonnées.
2. Comparer les longueurs de  $OM$  et de  $OM'$ .
3.  $\theta$  étant un nombre réel, quel est le transformé du point  $M$  de coordonnées  $(\sin \theta ; \cos \theta)$ ?
4. Dédire de ce qui précède que  $S$  est un déplacement, que l'on caractérisera.

**Partie C**

Par des considérations géométriques, déterminer les transformations composées  $S \circ T$  et  $T \circ S$ .