∽ Baccalauréat Mexico octobre 1966 ∾
Mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Décomposer en un produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels le trinôme bicarré

$$y = x^4 - 3x^2 + 9.$$

Calculer les zéros du trinôme dans le corps des complexes ; donner les solutions sous forme trigonométrique et en construire les images dans le plan complexe.

EXERCICE 2

Montrer que l'on peut décomposer de trois façons différentes le trinôme

$$y = x^4 - 10x^2 + 9$$

en un produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels et dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1.
Effectuer ces trois décompositions.

EXERCICE 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $x'\text{O}x,\ y'\text{O}y$. Soit m un point non situé sur les axes. Le cercle (Γ), tangent en O à Ox et passant par m, recoupe en M la parallèle à Oy menée par m.
M est alors l'homologue de m dans une transformation ponctuelle $\mathcal{T}$.

1. m ayant pour coordonnées x et y, calculer les coordonnées, X et Y, de M.
   La transformation $\mathcal{T}$ est-elle involutive ?
   Quel est l'ensemble des points invariants de $\mathcal{T}$?
   Quel est le transformé d'un cercle tangent en O à Ox ? Montrer que les couples de droites OM, Om et Ox, Oy sont antiparallèles.
2. Les tangentes à (Γ) aux points m et M coupent $x'\text{O}x$ aux points t et T. Soit H la projection orthogonale de m sur Ox et P le point d'intersection des tangentes mt et MT. Quelle est la polaire de H par rapport à (Γ) ?
   En déduire que le faisceau (OH, OP, Om, OM) est harmonique, ainsi que la division (O, H, t, T).
3. m décrit une courbe (C) d'équation $y = f(x)$.
   a. Quelle est l'équation de la courbe (C$'$) transformée de (C) dans $\mathcal{T}$?
   b. Soit y' et Y' les dérivées des fonctions y et Y ; démontrer la relation

   $$\frac{y'}{y} + \frac{Y'}{Y} = \frac{2}{x} \quad \text{pour tout } x \text{ différent de } 0.$$

   Écrire les équations des tangentes en m à (C) et en M à (C$'$) pour une valeur x_0 de x, x_0 étant différent de 0 et tel que $f(x_0) = y_0$ soit différent de 0.
   Soit t et T les intersections de ces tangentes et de Ox, H la projection orthogonale de m sur Ox. Montrer que la division (0, H, t, T) est harmonique.

4. **a.** Quelle est la transformée d'une droite (D) parallèle à Oy ?

   b. Quelle est la transformée d'une droite (D) parallèle à Ox ?
   Construire la transformée de la droite (D) d'équation $y = 4$.
   Préciser ses éléments remarquables.

   c. Quelle est la transformée d'une droite (D) passant par l'origine ?

   d. Quelle est la transformée d'une droite (D) d'équation

$$y = ax + b, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0?$$

   Montrer que, lorsque b varie, a restant fixe, les transformées des droites (D) sont des hyperboles ayant les mêmes directions asymptotiques.
   Construire la transformée de la droite d'équation $y = 2x + 4$.
   Construire la tangente, MT, à cette hyperbole au point M d'abscisse -1.

N. B. Le 4 est, dans une large mesure, indépendant du 3 b.