

☞ Baccalauréat Mexico octobre 1966 ☞
série mathématiques élémentaires

I.

Décomposer en un produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels le trinôme bicarré

$$y = x^4 - 3x^2 + 9.$$

Calculer les zéros du trinôme dans le corps des complexes.

Donner les solutions sous forme trigonométrique et en construire les images dans le plan complexe.

II.

Montrer que l'on peut décomposer de trois façons différentes le trinôme

$$y = x^4 - 10x^2 + 9$$

en un produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels et dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1.

Effectuer ces trois décompositions.

III.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$.

Soit m un point non situé sur les axes. Le cercle (Γ) , tangent en O à Ox et passant par m , recoupe en M la parallèle à Oy menée par m .

M est alors l'homologue de m dans une transformation ponctuelle $\mathcal{T}$.

1. m ayant pour coordonnées x et y , calculer les coordonnées, X et Y , de M .

La transformation $\mathcal{T}$ est-elle involutive? Quel est l'ensemble des points invariants de $\mathcal{T}$? Quel est le transformé d'un cercle tangent en O à Ox ? Montrer que les couples de droites OM , Om et Ox , Oy sont antiparallèles.

2. Les tangentes à (Γ) aux points m et M coupent $x'Ox$ aux points t et T . Soit H la projection orthogonale de m sur Ox et P le point d'intersection des tangentes mt et MT .

Quelle est la polaire de H par rapport à (Γ) ?

En déduire que le faisceau (OH, OP, Om, OM) est harmonique, ainsi que la division (O, H, t, T) .

3. m décrit une courbe (C) d'équation $y = f(x)$.

a. Quelle est l'équation de la courbe (C') transformée de (C) dans $\mathcal{T}$?

b. Soit y' et Y' les dérivées des fonctions y et Y ; démontrer la relation

$$\frac{y'}{y} + \frac{Y'}{Y} = \frac{2}{x} \quad \text{pour tout } x \text{ différent de } 0.$$

Écrire les équations des tangentes en m à (C) et en M à (C') pour une valeur x_0 de x , x_0 étant différent de 0 et tel que $f(x_0) = y_0$ soit différent de 0.

Soit t et T les intersections de ces tangentes et de Ox , H la projection orthogonale de m sur Ox .

Montrer que la division (O, H, t, T) est harmonique.

4. a. Quelle est la transformée d'une droite (D) parallèle à Oy ?

b. Quelle est la transformée d'une droite (D) parallèle à Ox ?

Construire la transformée de la droite (D) d'équation $y = 4$. Préciser ses éléments remarquables.

c. Quelle est la transformée d'une droite (D) passant par l'origine?

d. Quelle est la transformée d'une droite (D) d'équation

$$y = ax + b, \quad a \neq 0, b \neq 0?$$

Montrer que, lorsque b varie, a restant fixe, les transformées des droites (D) sont des hyperboles ayant les mêmes directions asymptotiques.

Construire la transformée de la droite d'équation $y = 2x + 4$.

Construire la tangente, MT , à cette hyperbole au point M d'abscisse -1 .

N. B. Le 4 est, dans une large mesure, indépendant du 3. b.