Baccalauréat mathématiques élémentaires Mexico octobre 1963

EXERCICE 1

Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{x^2-1}{x^2-4x+4}.$$

Construire la courbe représentative dans un repère orthonormé.
Déterminer la valeur de x pour laquelle la dérivée seconde de cette fonction est nulle.
Construire la tangente au point correspondant de la courbe représentative.

EXERCICE 2

On donne dans un plan deux cercles, (B) et (C), de rayons respectifs R et $\frac{R}{2}$, tangents extérieurement en un point A.
On appelle (Γ) tout cercle tangent aux cercles (B) et (C) en deux points, M et N, distincts de A.

1. Construire un cercle (Γ), connaissant son rayon, a.
   Indiquer le nombre de solutions suivant les valeurs de a.
   Montrer que l'ensemble des centres des cercles (Γ) est une hyperbole, dont on construira les asymptotes.
2. Montrer que la droite MN passe par un point fixe, I.
   Calculer la distance AI en fonction de R.
   Construire un cercle (Γ), connaissant son point de contact, M, avec le cercle (B).
3. On effectue l'inversion de centre A, de puissance négative $-2R^2$; on désigne par (b), (c) les transformées des cercles (B) et (C). Montrer que les transformés (γ) des cercles (Γ) sont des cercles égaux et que les cercles (Γ) sont orthogonaux à un cercle fixe, dont on déterminera le centre et le rayon.
   Trouver l'ensemble des points de contact de deux cercles (Γ) tangents entre eux.
4. Soit (D) une droite passant par A. Montrer qu'il existe, en général, deux cercles (Γ) tangents à (D).
   Les construire.
   Les cercles (Γ_1) et (Γ_2) ainsi obtenus sont tangents au cercle (B), au cercle (C) et à la droite (D).
   Montrer qu'il existe encore un cercle (Ω) passant par A et tangent à (Γ_1) et (Γ_2).
   Trouver l'ensemble des centres (ω) de ces cercles (Ω) quand (D) varie en passant constamment par A.