Baccalauréat mathématiques élémentaires
Mexico octobre 1964

I.

1. Soit un cercle (O), de centre O et de rayon R, et un point A (OA = d).
On demande de déterminer l'ensemble des centres ω des cercles (ω) passant par A et orthogonaux au cercle (O).
Montrer que la polaire de ω par rapport à (O) passe par un point fixe, H.
Calculer OH en fonction de d et de R.

2. Résoudre l'équation en x

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 2x.$$

On exprimera x en radians et l'on reportera sur le cercle trigonométrique les extrémités des arcs solutions.
$\left(\text{On pourra poser } x = \dfrac{\pi}{4} + X.\right)$

II.

1. Calculer la dérivée par rapport à x de la fonction

$$z = \frac{x^2}{2}\text{Log}x - \frac{3x^2}{4}.$$

2. Sachant que, si $x \to +\infty$, $\dfrac{\text{Log}x}{x} \to 0$, calculer, en utilisant le changement de variable $x = \dfrac{1}{u}$, la limite de $x\text{Log}x$ quand $x \to 0$ par valeurs positives.

3. Étudier la fonction de x

$$y = x\log x - x.$$

Sens de variation. Limites de y quand $x \to 0$ et quand $x \to +\infty$.
Construire le graphe, $(\mathscr{C})$, de cette fonction. A-t-il une direction asymptotique ; une asymptote ?
Calculer l'aire géométrique limitée par l'axe des x et la courbe située du côté des y négatifs (axes orthonormés).

4. Déterminer l'équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point A_0 d'abscisse x_0.
Cette tangente coupe l'axe des y en P_0. Déterminer l'abscisse x_1 du point A_1 de $(\mathscr{C})$ où la tangente a un coefficient directeur opposé à celui de la tangente en A_0.
La tangente en A_1 coupe l'axe des y en P_1.
Montrer que, lorsque x_0 varie, les cercles de diamètres P_0P_1 appartiennent à un faisceau, dont on précisera les points limites, I et J (axes orthonormés).