Baccalauréat Mexico novembre 1967

SÉRIE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Exercice 1

Calculer les primitives de $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ (on pourra exprimer ces fonctions au moyen de $\cos 2x$).

Exercice 2

Quels sont les entiers positifs n pour lesquels $15 \times 3^n - 3$ est divisible par 7 ?

Exercice 3

1. Dans un plan muni d'un repère orthonormé on considère la rotation R ayant pour centre l'origine, O, et pour angle θ $(0 < \theta < 2\pi)$.
   Au point $M(x\,;\ y)$ correspond le point $M_1\left(x_1\,;\ y_1\right)$; établir les formules

   $$(1) \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x_1 &=& x\cos\theta - y\sin\theta,\\ y_1 &=& x\sin\theta + y\cos\theta.\end{array}\right.$$

   $\left[\text{On pourra utiliser les angles } \left(\overrightarrow{\text{O}x}\,,\ \overrightarrow{\text{O}M}\right) \text{ et } \left(\overrightarrow{\text{O}x}\,,\ \overrightarrow{\text{O}M_1}\right).\right]$
2. On considère une nouvelle transformation, S, définie par les formules

   $$(2) \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x' &=& -x\cos\theta - y\sin\theta + 2p\cos\dfrac{\theta}{2},\\ y' &=& -x\sin\theta + y\cos\theta + 2p\sin\cos\dfrac{\theta}{2},\end{array}\right.$$

   où p est un nombre réel donné. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ reste parallèle à une droite fixe et que le milieu de MM' décrit une droite fixe . Quelle est la nature géométrique de S ?
3. Établir les formules donnant la transformation produit définie par $T(M) = S[R(M)]$.

   Démontrer de deux façons (à l'aide des formules précédentes et géométriquement) que T est le produit commutatif d'une translation et d'une symétrie par rapport à une droite parallèle à la direction de la translation.
4. Tout point du plan, dans ce repère orthonormé, est l'image d'un nombre complexe.

   Calculer l'affixe du transformé par T d'un point M, en fonction de l'affixe de M.