Baccalauréat C Mexico juin 1977

EXERCICE 1

Soit f la fonction numérique définie sur $[\, 0\,;\, +\infty\, [$ par

$$\left\{\begin{array}{l c l l} f(x) & = & \text{e}^{\frac{\text{Log}\, x}{x}} & \text{si } x \in]\, 0\,,\, +\infty\, [\\ f(0) & = & 0. & \end{array}\right.$$

1. Montrer que f est une fonction continue sur l'intervalle $[\, 0\,,\, +\infty\, [$.
2. **a.** Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]\, 0\,,\, +\infty\, [$

   b. Étudier si $\text{Log}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)$ admet une limite quand x tend vers 0 par valeurs positives.

   En déduire que f est dérivable à droite au point 0.
3. Tracer dans un repère orthonormé la courbe (C) représentative de f (On précisera la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1.)

EXERCICE 2

1. Montrer que la fonction numérique f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{1}{x(\text{Log}\, x)^2}$$

   est décroissante pour $x \geqslant 2$. (Log x représente le logarithme népérien de x.)
2. Trouver une primitive de la fonction f.
3. Soit la suite numérique (u) définie pour tout n supérieur ou égale à 3 par

$$u_n = \sum_{i=3}^{i=n} \frac{1}{i(\text{Log}\, i)^2} = \frac{1}{3(\text{Log}\, 3)^2} + \frac{1}{4(\text{Log}\, 4)^2} + \ldots + \frac{1}{n(\text{Log}\, n)^2}.$$

   a. En utilisant le théorème de la moyenne sur l'intervalle $[k\,;\, k+1]$, où k est un entier supérieur ou égal à 2, déduire de la question **1.** que

$$u_n \leqslant \int_2^n \frac{1}{x(\text{Log}\, x)^2}\, \text{d}x.$$

   b. Déduire de la question **2.** que u_n est bornée lorsque n tend vers $+\infty$.

PROBLÈME

Soit P le plan affine euclidien orienté et $\left(\text{O},\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé direct de P. On désigne par (Γ) la courbe admettant pour équation dans le repère $\left(\text{O},\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$

$$x^2 - xy + y^2 = 1.$$

I.

1. Soit R la rotation vectorielle dont une mesure de l'angle est $\dfrac{\pi}{4}$, on pose $\overrightarrow{e_1} = R\left(\overrightarrow{\imath}\right)$, $\overrightarrow{e_2} = R\left(\overrightarrow{\jmath}\right)$.

   Démontrer que l'équation de (Γ) dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{e_1}\ ,\ \overrightarrow{e_2}\right)$ est $X^2 + 3Y^2 = 2$.

   Quelle est la nature de (Γ) ?

   En donner une représentation graphique dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath}\ ,\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ (on prendra 6 cm comme unité de longueur).

2. Soit M et M' deux points, de P de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath}\ ,\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. On désigne par $M * M'$ le point de coordonnées $(xx' - yy'\ ;\ xy' + yx' - yy')$.

   À chaque point $M(x\ ;\ y)$ de P, on associe la matrice $B_M = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x-y \end{pmatrix}$.

   a. Démontrer que $B_M \cdot B_{M'} = B_{M*M'}$ et que M est sur (Γ) si, et seulement si le déterminant de la matrice B_M est égal à 1.

   b. Démontrer que l'application qui à chaque point M associe la matrice B_M est injective. En utilisant les propriétés de la multiplication des matrices, déduire que $(\Gamma, *)$ est un groupe commutatif d'élément neutre, le point $A(1\ ;\ 0)$.

3. Soit S la symétrie affine par rapport à la droite d'équation $y = 0$, dans la direction de la droite d'équation $y = 2x$. Définir analytiquement S et vérifier que si M^{-1} est le symétrique d'un point M de (Γ) pour la loi $*$, on a $M^{-1} = S(M)$.