Durée : 4 heures

Baccalauréat C Montpellier juin 1970

EXERCICE 1

1. Calculer le module et l'argument de $u = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
2. Soit T la transformation ponctuelle plane qui associe au point m (image de z) le point M (image de Z), avec

$$Z = \left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)z + \sqrt{3}.$$

Déterminer le point double, A, de T.

Montrer que T est une similitude plane directe, que l'on précisera (centre, rapport et angle).

EXERCICE 2

Utiliser les congruences pour calculer les restes de la division par 7 des nombres suivants : 5^6, 5^{6p} (p est un entier positif) et 33^{38}.

EXERCICE 3

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$ on donne deux points fixes $\mathrm{A}(a\,;\,a)$ et $\mathrm{B}(a\,;\,-a)$, a étant une longueur donnée.
Sur $\mathrm{O}y$ varient deux points $\mathrm{P}(y = u)$ et $\mathrm{P}'(y = v)$ de façon que

$$(1) \qquad uv = 2a^2$$

1. Montrer que (1) définit une application bijective f

$$(\mathrm{P} \xrightarrow{f} \mathrm{P}')$$

de $y'\mathrm{O}y$ (privé de O) sur lui-même et que P et P′ restent conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes K et K′, que l'on précisera.

2. Donner les équations des droites AP′ et BP.

Ces deux droites se coupent en M ; donner l'équation cartésienne de l'ensemble (H) des points M ; obtenus quand P et P′ varient.

On trouvera

$$(H) \qquad y^2 - 3x^2 + 4ax - 2a^2 = 0.$$

3. Trouver l'équation réduite de la courbe (H).

Préciser ses éléments : centre, axes, asymptotes et sommets. Construire (H).

4. On considère l'inversion, I, de pôle O, de puissance $p = 2a^2$.

Donner une construction géométrique des figures inverses des droites BP et AP′.

En déduire que l'ensemble des points N, intersection des cercles OBP′ et OAP, est la courbe (C) inverse de (H) dans l'inversion $I\left(\mathrm{O},\, 2a^2\right)$. On ne demande pas la construction de (C).

Les droites AP et BP′ se coupent en général en un point, S. Quel est l'ensemble des points S ?

Montrer que la droite MS passe par un point fixe, ω, que l'on précisera, et trouver le lieu du conjugué harmonique de ω par rapport aux points M et S.