∽ Baccalauréat C Montpellier juin 1973 ∽

EXERCICE 1

Résoudre l'équation $x^3 = x$:

1. Dans l'ensemble $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$;
2. Dans l'ensemble $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

EXERCICE 2

Soit un plan affine euclidien P, rapporté à un repère cartésien orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes la suite de terme général z_n définie par son premier terme $z_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$2z_{n+1} = z_n + \text{i}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, non nul, le module r_n de z_n est inférieur à 1.
2. On pose $z_n = x_n + \text{i}y_n$ (où x_n et y_n sont des nombres réels) et $u_n = z_n - \text{i}$.
   Trouver une relation entre u_{n+1} et u_n. En déduire que la suite de terme général x_n est une suite géométrique qui converge vers 0 et que les suites de termes généraux y_n et r_n convergent vers 1.
3. Calculer le plus petit entier n_0 tel que, pour tout n supérieur ou égal à n_0 on ait

$$|z_n - \text{i}| < 10^{-5}$$

PROBLÈME

Partie A

On considère l'application T, de P vers P, qui, au point m de coordonnées $(x\,;\,y)$ fait correspondre le point M dont les coordonnées $(X\,;\,Y)$ sont définies par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} X &=& x \\ Y &=& -2x + y \end{array}\right.$$

1. Démontrer que T est une application affine bijective et déterminer par sa matrice dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ l'application linéaire (ou endomorphisme) associée.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par T.
3. Quelle est la transformée d'une droite quelconque de P ? Existe-t-i1 des droites invariantes ? Existe-t-il des droites orthogonales à leurs transformées ?
4. Soit (γ) la courbe de P d'équation $y = \text{e}^x$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   a. Donner une équation cartésienne de la courbe (Γ) transformée de (γ) par T, que l'on mettra sous la forme $Y = g(X)$.
   b. Étudier la fonction g, et représenter (γ) et (Γ) sur un même graphique.
   c. Soit m un point de (γ), M son image par T. Calculer l'aire S du domaine compris entre les courbes (γ), (Γ) et la droite mM.
   d. Les tangentes à (γ) en m et à (Γ) en M se coupent en J. Calculer l'abscisse de J. Comparer S à l'aire du triangle JmM.

5. Soit (h) la courbe de P d'équation $4x^2 - y^2 = 4$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Déterminer la nature de (h) et ses éléments remarquables.

Montrer que $[H]$, transformée de (h) par T a une équation cartésienne qui peut s'écrire $X = u(Y)$. Étudier la fonction u. Construire $[H]$ et (h) sur un même graphique.

Partie B

À tout réel k on associe l'application T_k de P dans P qui à $m(x\ ;\ y)$ fait correspondre le point $M(X\ ;\ Y)$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} X &=& x\\ Y &=& kx+y\end{array}\right.$$

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}$ des transformations T_k quand k décrit $\mathbb{R}$, muni de la loi de composition des applications, est un groupe commutatif.

2. Déterminer l'ensemble A des applications affines f de P vers P telles que, pour tout k,

$$f \circ T_k = T_k \circ f$$

Soit A' le sous-ensemble de A formé des applications f bijectives, qui laissent O invariant.

Démontrer que tout élément de A' est le produit d'une transformation T_k et d'une transformation simple que l'on déterminera, et que, $\left(A',\ \circ\right)$ est un groupe commutatif.

3. On donne d'une part une transformation T_k d'autre part trois réels α, β, γ de somme non nulle. Soit φ l'application de P dans P qui associe au point m le barycentre G du système

$$\{(\text{O},\ \alpha),\ (m,\ \beta),\ \left(T_k(m),\ \gamma\right)\}$$

Montrer que φ est un élément de A ; est-ce un élément de A' ?

N.B. : Les parties A et B du problème sont indépendantes.