Baccalauréat C Montpellier septembre 1970

EXERCICE 1

EXERCICE 1

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère la sphère (S) d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

1. Donner les équations du cylindre de révolution d'axe Ox, circonscrit à la sphère (S), et du cône de révolution de sommet A$(0~;~0~;~+6)$, circonscrit à (S).
2. Montrer que l'intersection du cône et du cylindre est incluse dans la réunion des deux plans d'équations respectives

$$2x\sqrt{2} - 3z + 2 = 0 \quad \text{et} \quad 2x\sqrt{2} + 3z - 2 = 0.$$

EXERCICE 2

Résoudre dans le corps des complexes l'équation

$$z^2 - 4(1 - \text{i})z + 2(4 - \text{i}) = 0.$$

On calculera le module et l'argument des racines de cette équation.

EXERCICE 3

Dans ce problème on se propose d'étudier quelques aspects de l'inversion de pôle O et de puissance k^2 $(k > 0)$.

1. Soit deux droites (D_1) et (D_2) concourantes en A.
   Rappeler la définition et une construction de la polaire du point O par rapport à (D_1) et à (D_2). Soit (Δ) cette polaire. On supposera que O n'appartient ni à (D_1) ni à (D_2).
2. On fait subir à la figure formée par (D_1), (D_2) et (Δ) l'inversion de pôle O et de puissance k^2.
   On obtient trois cercles de centres respectifs ω_1, ω_2 et I. Étudier cette figure ; en particulier quelle est la disposition des points ω_1, ω_2 et I ?
   (On pourra utiliser le faisceau des droites Oω_1, Oω_2 et OI et la perpendiculaire abaissée de O sur OA.)
3. On coupe les trois cercles par une droite (D_3) passant par O ; étudier la disposition des trois points d'intersection autres que O. Énoncer le théorème obtenu.
4. On suppose le plan rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Soit $M(x~;~y)$ un point du plan. On lui associe le point $M'\left(x'~;~y'\right)$ par la transformation, T, définie par

$$x' = \frac{k^s x}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad y" = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2}$$

   Montrer que T est définie sur tout le plan diminué d'un point, que l'on précisera.

Montrer que cette transformation est involutive.

Cette transformation possède-t-elle des points doubles ? Si oui, quel est leur ensemble ?

Montrer que O, M et M' sont alignés. Calculer $\overline{\text{O}M} \cdot \overline{\text{O}M'}$.

Quelle est cette transformation ?

Représenter graphiquement la fonction f qui à x associe

$$f(x) = x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \quad (a \text{ constante positive}).$$

En déduire la courbe (C) représentée par l'équation

$$y^2(a+x) = x^2(a-x)$$

et la courbe (C') inverse de (C) dans T.