

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Montpellier juin 1969 ∞

EXERCICE 1

On désigne par x et y deux nombres réels, par z le nombre complexe $x + iy$ et par Z le nombre complexe iz . On appelle m l'image de z , M l'image de Z et A l'image de i .

- Décrire géométriquement la transformation ponctuelle T qui, au point m , associe le point M .
 - Calculer les coordonnées, X et Y , de M en fonction de celles de m .
Déterminer l'ensemble des points m tels que les trois points m , M et A soient alignés.

EXERCICE 2

Démontrer que, quel que soit l'entier $n \geq 1$, l'entier

$$A = n^2(n^2 - 1)$$

est divisible par 12.

PROBLÈME

Soit a un nombre positif donné. Dans un plan rapporté à un repère orthonormé xOy , on considère le cercle, noté (O), de centre O et de rayon $a\sqrt{2}$, et le cercle, noté (A), de centre $A(3a; 0)$ et de rayon a . On appelle (D) la droite d'équation $y = a$.

- Les cercles (O) et (A) définissent un faisceau (F). Préciser l'axe radical, (Δ), de ce faisceau et ses points limites, I et J.
- On désigne par u l'abscisse d'un point M de (D), par p la puissance de M par rapport au cercle (O) et par p' la puissance de M par rapport au cercle (A).
Démontrer que le rapport $\frac{p}{p'}$ a l'expression suivante :

$$z = \frac{u^2 - a^2}{(u - 3a)^2}.$$

Étudier les variations de z en fonction de u et construire le graphe, (C), de cette fonction par rapport à un repère orthonormé $u\Omega z$. Utiliser ce graphe pour discuter, suivant la valeur du nombre réel k , l'existence et le nombre des points M tels que $\frac{p}{p'} = k$.

- Calculer l'aire, S , du domaine plan limité par l'axe Ωu et l'arc du graphe (C) défini par $-a \leq u \leq a$. On pourra, pour cela, déterminer trois réels, α, β, γ , tels que

$$z = \alpha + \frac{\beta}{u - 3a} + \frac{\gamma}{(u - 3a)^2}.$$

- On désigne par N l'intersection des polaires de M par rapport aux cercles (O) et (A); soit (Γ) le cercle de diamètre MN . Quelle est la nature de la famille des cercles (Γ) ainsi obtenus, lorsque M décrit la droite (D)?
Donner, en utilisant les points I et J, une construction géométrique du point N associé à un point M donné.