

Durée : 4 heures

## ∞ Baccalauréat C Montpellier juin 1972 ∞

### EXERCICE 1

Déterminer les restes de la division par 13 des quatre premières puissances de 5.  
En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, le nombre

$$N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$$

est divisible par 13.

### EXERCICE 2

On considère l'espace vectoriel,  $\mathcal{P}_3$  sur le corps des nombres réels,  $\mathbb{R}$ , des applications polynômes, de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ , de degré inférieur ou égal à 2. Un élément,  $P$ , de  $\mathcal{P}_3$  est déterminé par ses coefficients,  $a, b$  et  $c$ , réels et il définit la fonction

$$x \longmapsto P(x) = ax^2 + bx + c.$$

1. Démontrer que les ensembles suivants :

$$A = \{P \in \mathcal{P}_3 / P(x) = ax^2 + bx, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\text{et } B = \{P \in \mathcal{P}_3 / P(x) = \lambda x^2 - 2\mu x + \lambda, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{P}_3$ .

Déterminer une base de  $A$  et une base de  $B$  et en déduire les dimensions de  $A$  et de  $B$ .

2. Déterminer l'intersection  $A \cap B$  des deux sous-espaces  $A$  et  $B$  et la dimension de cette intersection.

3. Soit  $f$  l'application de  $\mathcal{P}_3$  vers  $\mathcal{P}_3$  définie par

$$P \longmapsto Q = f(P),$$

où  $Q$  est la fonction polynôme définie par  $Q(x) = P(x) + (x-1)P'(x)$ ,  $P'$  étant la fonction dérivée de  $P$ .

Montrer que  $f$  est une application linéaire.

### PROBLÈME

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé d'axes  $x'Ox$ ,  $y'Oy$ , à tout nombre complexe  $z = x + iy$  ( $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ) on associe le point,  $m$ , de coordonnées  $x$  et  $y$ ;  $m$  est dit image de  $z$ ,  $z$  est dit affixe de  $m$ .

On désigne par A, B, C et D les images respectives des nombres  $-1$ ,  $+1$ ,  $\frac{1}{3}$  et 3 et par (C) le cercle de diamètre [AB].

À tout point  $m$ , différent de D, on associe son affixe  $z$ , puis le nombre complexe

$$Z = \frac{(3z-1)z}{z-3},$$

et enfin l'image  $M$  de  $Z$ .

On désigne par  $T$  l'application qui à  $m$  associe  $M$ .

- Démontrer que  $Z$  peut s'écrire sous la forme  $Z = az + b + \frac{c}{z-3}$  les nombres  $a, b$  et  $c$  étant des nombres réels.
- On suppose que  $m$  parcourt l'axe  $x'Ox$ . Étudier alors la fonction  $f$  telle que

$$f(x) = \frac{(3x-1)x}{x-3}$$

et tracer sa courbe représentative. En déduire l'image du segment  $[AB]$  par  $T$ . Calculer l'aire comprise entre la courbe, son asymptote oblique et les droites d'équations respectives  $x = e + 3$  et  $x = 6$  ( $e$  désignant la base des logarithmes népériens).

- Soit  $Z_1 = \frac{3z-1}{3-z}$ ; démontrer que  $|Z_1| = 3 \frac{mC}{mD}$  et  $\arg Z_1 = (\overrightarrow{mD}, \overrightarrow{Cm})$ .

- Quel est l'ensemble des points  $m$  tels que  $\frac{mC}{mD} = \frac{1}{3}$ ?

En déduire que pour ces points on a  $|z| = |Z_1| = |Z| = 1$ .

On suppose que  $m$  appartient au demi-cercle  $(C')$  de diamètre  $[AB]$  qui contient l'image de  $i$ . Soit  $\theta$  l'argument de  $z$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) et  $\varphi$  l'argument de  $Z_1$ .

Montrer que  $\sin \varphi \geq 0$ .

On suppose  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Calculer  $\cos \varphi$  en fonction de  $\cos \theta$  et en déduire que  $\varphi$  est une fonction croissante de  $\theta$ .

Calculer une valeur approchée de  $\varphi$  lorsque  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .