Baccalauréat C Montpellier juin 1974

EXERCICE 1

φ désignant un paramètre réel vérifiant $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$, on considère l'équation :

$$z^2 - \frac{2}{\cos\varphi} + \frac{5}{\cos^2\varphi} = 4. \qquad \text{(E)}$$

1. Trouver les racines z' et z'' de l'équation (E) dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
2. Soit M' et M'' les images de z' et z'' dans le plan complexe.
   Montrer que z' et z'' décrivent, quand φ varie dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, une branche d'hyperbole que l'on dessinera.

EXERCICE 2

On désigne par E l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, a, b, c, d étant des entiers relatifs vérifiant $ad - bc = 1$.

1. Vérifier que le produit de deux matrices appartenant à E est un élément de E.
2. Montrer que E, muni de la multiplication matricielle, a une structure de groupe.
3. Trouver une matrice de E pour laquelle $a = 22$ et $b = 17$ (on pourra utiliser l'algorithme d'Euclide).

PROBLÈME

Partie A

On dira qu'une fonction numérique f, continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, est convexe sur I si :

$$x \in \text{I},\ y \in \text{I} : \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

1. **a.** Montrer que les fonctions $f_1 : x \longmapsto x^2$ et $f_2\ x \longmapsto \text{e}^x$ sont des fonctions convexes sur $\mathbb{R}$.
   b. La fonction $f_3 : x \longmapsto \text{Log}\,x$ est-elle convexe sur $]0\,;\,+\infty]$?
   (Log x représente le logarithme népérien de x).
2. On désigne par h la fonction définie sur $[0\,;\,\pi]$ par $h(x) = -\sin x$.
   a. Montrer que h est convexe sur $[0\,;\,\pi]$.
   b. Montrer que si $x \neq y$, $\quad h\left(\dfrac{x+y}{2}\right) < \dfrac{h(x) + h(y)}{2}$.
3. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) > 0$$

   a. Soit x_0 un réel fixé et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f\left(\frac{x + x_0}{2}\right) - \left[\frac{f(x) + f(x_0)}{2}\right]$$

   Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$.

b. Montrer que si $x < x_0$, $\quad g'(x) > 0$ et si $x > x_0$, $\quad g'(x) < 0$.
En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad g(x) \leqslant 0$ et que f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction φ définie sur $[0 ; 2\pi]$ par :

$$\varphi(x) = \sin\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{4}.$$

Étudier les variations de la fonction φ sur $[0 ; 2\pi]$.
En déduire l'inégalité : $\forall x \in [0 ; 2\pi]$, $\quad \varphi(x) \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Partie C

Dans un plan affine euclidien, on considère un cercle Γ de centre O, de rayon R.
Soit A un point fixé de Γ et α, β, γ, trois réels positifs vérifiant $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$.
On désigne par B et C les points de Γ tels que α, β, γ, soient des mesures respectives des angles $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right)$, $\left(\overrightarrow{\text{OB}}, \overrightarrow{\text{OC}}\right)$, $\left(\overrightarrow{\text{OC}}, \overrightarrow{\text{OA}}\right)$.

1. Calculer en fonction de R, α et β le périmètre

$$P = \left\|\overrightarrow{\text{AB}}\right\| + \left\|\overrightarrow{\text{BC}}\right\| + \left\|\overrightarrow{\text{CA}}\right\|$$

du triangle ABC.
2. Montrer, en utilisant la partie A 2., puis la partie B, que :

$$P \leqslant 2R.\varphi(\alpha + \beta) \leqslant 3R\sqrt{3}$$

et que si $\alpha \neq \beta$, $\qquad P < 3R\sqrt{3}$.
3. Pour quelles positions des points B et C le triangle ABC a-t-il un périmètre maximal ?