

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1975 Montpellier ∞

EXERCICE 1

1. Résoudre dans \mathbb{N}^2 l'équation

$$7x - 4y = 4$$

2. Un entier naturel a s'écrit $\overline{75}$ dans le système de base x et $\overline{49}$ dans le système de base y . Un entier naturel b s'écrit $\overline{310}$ dans le système de base x et $\overline{125}$ dans le système de base y . Déterminer x et y puis a et b .

EXERCICE 2

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x^2 - x^2 \text{Log } x.$$

1. Étudier ses variations, tracer sa courbe représentative (C) dans un plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'unité de longueur étant 1 cm. On précisera l'allure de la courbe aux bornes de l'ensemble de définition.
2. En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire de la partie du plan comprise entre $x'Ox$, (C) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

PROBLÈME

Partie A

Soit E le plan vectoriel euclidien et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de E . On appelle φ_a l'application linéaire de E dans E dont la matrice, relativement à \mathcal{B} est :

$$\begin{pmatrix} 1-a & a\sqrt{3} \\ a\sqrt{3} & a-1 \end{pmatrix}$$

a étant un réel.

1. Pour quelles valeurs de a , φ_a est-elle bijective? Pour quelles valeurs de a , φ_a est-elle involutive? Quel est le noyau de φ_a ? Quelle est l'image de φ_a ?
2. On donne à a la valeur $1/2$. Quelle est la nature de $\varphi_{1/2}$? Quel est l'ensemble des vecteurs invariants par $\varphi_{1/2}$? Quelles sont les droites vectorielles globalement invariantes par $\varphi_{1/2}$?

Partie B

On désigne par \mathcal{E} un plan affine euclidien associé à E et on considère le repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ de \mathcal{E} . On appelle f l'application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{E} dont l'application linéaire associée est $\varphi_{1/2}$ et qui au point O associe le point $A(O; 2)$. Soit donc :

$$f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \\ M(x; y) \mapsto M'(x'; y')$$

1. Établir que :

$$\begin{cases} x' &= \frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2} \\ y' &= \frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{y}{2} + 2 \end{cases}$$

puis exprimer x et y en fonction de x' et y' .

2. Soit z le nombre complexe affixe de M et z' l'affixe de $M' = f(M)$.

a. Écrire une relation entre z' et z .

b. Montrer que :

α f laisse globalement invariante la droite Δ d'équation

$$x - \sqrt{3}y + 0 = 0$$

α f est la composée de la symétrie orthogonale s_{Δ} par rapport à Δ et d'une certaine translation $t_{\vec{v}}$ de vecteur \vec{v} , \vec{v} étant un vecteur directeur de Δ .

3. On se propose de retrouver géométriquement le résultat précédent. On désigne par D et les droites d'équations :

$$x - y\sqrt{3} = 0 \quad \text{et} \quad x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$$

Soit s_D et s_{Δ} les symétries orthogonales par rapport à D et Δ .

a. Trouver deux vecteurs \vec{V} et \vec{W} respectivement parallèle et perpendiculaire à D tels que :

$$2\vec{J} = \vec{V} + \vec{W}$$

Soit $t_{\vec{V}}$ et $t_{\vec{W}}$ les translations de vecteurs \vec{V} et \vec{W} .

b. Montrer que : $f = t_{\vec{V}} \circ t_{\vec{W}} \circ s_D$.

Vérifier : $t_{\vec{W}} \circ s_D = s_{\Delta}$ et conclure.

4. On donne la conique (C) d'équation $x^2 = 3y^2 - 6y$. Construire (C) .

Écrire l'équation de (C') , image de (C) par f . Mettre cette équation sous la forme $y = g(x)$. Construire (C') et écrire les équations de ses asymptotes.