∽ Baccalauréat C Montpellier juin 1978 ∾

EXERCICE 1 **5 POINTS**

P est un plan affine rapporté à un repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. Soit a un nombre réel.
On considère l'application affine notée f_a définie par :

$$\begin{array}{llll} f_a : P & \to & P & \\ M(x~;~y) & \longmapsto & M'\left(x'~;~y'\right) & \text{avec} \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& ax+a-1\\ y' &=& (3a-1)x+(1-2a)y+2.\end{array}\right.$$

1. Montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle f_a est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.
2. Existe-t-il a tel que f_a soit involutive ? Montrer qu'alors $f_a$est une symétrie que l'on précisera ?
3. Déterminer avec précision l'ensemble $f_a(P)$ suivant les valeurs de a.

   On suppose $a = 0$. soit t la translation de vecteur $3\vec{\jmath}$. Montrer qu'il existe une projection p que l'on déterminera telle que :

$$f_0 = t \circ p = p \circ t.$$

EXERCICE 2 **3 POINTS**

Dans un jeu de hasard, un joueur a misé 1 F sur le numéro 5. Le jeu consiste à jeter deux dés parfaits. Si le numéro 5 est obtenu sur chacun des deux dés, le joueur reçoit 4 F. S'il est obtenu sur un seul dé, le joueur reçoit 3 F. S'il n'est obtenu sur aucun dé, le joueur perd sa mise.

1. Quelles sont les probabilités respectives de ces événements ?
2. Le gain du joueur (somme reçue diminuée de la mise) est une variable aléatoire. Quelle est son espérance mathématique ?

PROBLÈME **3 POINTS**

Partie A

Soit la fonction :

$$\begin{array}{lcl} \varphi : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{\text{e}^{2x}-1}{\text{e}^{2x}+1}.\end{array}$$

1. Démontrer que φ est impaire. Étudier les variations de la fonction φ et tracer sa courbe représentative.
2. On désigne par I l'intervalle $]-1~;~1[$. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur I. Déterminer l'application réciproque φ^{-1}.
3. Démontrer que si a et b sont deux nombres réels, alors :

$$\varphi(a+b) = \dfrac{\varphi(a)+\varphi(b)}{1+\varphi(a)\varphi(b)}.$$

4. En déduire que si α et β appartiennent à l'intervalle I, alors :

$$\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta} \in \mathrm{I}.$$

Partie B

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère le sous-ensemble

$$D = \{z \in \mathbb{C} | \quad |z| < 1\}.$$

Soit α un réel appartenant à I.

1. En supposant $z \in D$, comparer $|z-\alpha|$ et $|1-\alpha z|$.
En déduire que si z appartient à D, alors $\dfrac{z-\alpha}{1-\alpha z}$ est défini et appartient à D.

2. Pour tout α de I, on a ainsi défini une application f_α :

$$\begin{array}{rcl} f_\alpha : D & \to & D \\ z & \longmapsto & \dfrac{z-\alpha}{1-\alpha z} \end{array}.$$

Montrer que f_α est une bijection de déterminer la bijection réciproque.

3. On pose : $\mathscr{F} = \{f_\alpha | \quad \alpha \in \mathrm{I}\}$.
Montrer que la composition des applications (notée $\circ$) est une loi de composition interne dans $\mathscr{F}$.
Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & f_{\varphi a} \end{array}$$

(φ désignant l'application définie au A) est un isomorphisme de $(\mathbb{R},\ +)$ sur $(F,\ \circ)$.
Montrer que cet isomorphisme permet de retrouver les propriétés de f_α.