∽ Baccalauréat C Montpellier juin 1979 ∾

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl l l} f(x) & = & x\mathrm{e}^{1+2x} & \text{pour} & x \leqslant 0\\ f(x) & = & x(1-\log x) & \text{pour} & x > 0\end{array}\right.$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

Quatre nombres entiers strictement positifs a, b, c, d forment, dans cet ordre, une suite géométrique dont la raison est un nombre entier premier avec a.
Trouver ces nombres sachant qu'ils vérifient en outre la relation :

$$10a^2 = d - b.$$

PROBLÈME **3 POINTS**

I.

1. Soit λ un nombre complexe non nul. On considère la suite des nombres complexes :
   $S : \begin{array}{lcl}\mathbb{N} & \to & \mathbb{C}\\ n & \longmapsto & z_n\end{array}$ définie par $z_0 = 0$ et la relation :

   $$(1) \qquad z_{n+1} = \lambda z_n + \mathrm{i} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

   a. Calculer z_1, z_2, z_3, puis z_n en fonction de λ.
   Étudier particulièrement les cas $\lambda = 1$, $\lambda. = -1$.

   b. Deux termes de la suite S, d'indices différents, peuvent-ils être égaux?
   Montrer que, dans l'affirmative, S est périodique.

   c. Démontrer la relation :

   $$(2) \qquad z_{n+2} = (1+\lambda)z_{n+1} - \lambda z_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

   Montrer qu'inversement, toute suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $z_0 = 0$, $z_1 = \mathrm{i}$, et la relation (2) est égale à S.

2. On considère un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.
   L'affixe d'un point M de coordonnées $(x ; y)$ est le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$.
   On donne des réels r, θ, tels que $r > 0$; $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.
   On notera u le nombre complexe de module r, d'argument θ.
   On définit une suite de points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les conditions :

   A_0 est l'origine du repère
   A_1 est le point d'affixe i
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le point A_{n+2} est l'image de A_{n+1} par la similitude de centre A_n, de rapport r, d'angle θ.

On note z_n l'affixe du point A_n.
Écrire une relation entre z_n, z_{n+1} et z_{n+2}.
Montrer, en utilisant la question **1.**, que A_{n+2} est l'image de A_n par une similitude Ψ indépendante de n dont on précisera le centre, le rapport et l'angle.

3. On suppose $r = 2\cos\theta$. Que peut-on dire de la similitude Ψ ?
La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut-elle être périodique ?

4. On suppose maintenant $r = \dfrac{1}{\cos\theta}$. Préciser dans ce cas les caractéristiques de la similitude Ψ.
Démontrer que tous les points A_n appartiennent à l'une ou l'autre de deux droites perpendiculaires, et que les vecteurs $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$, $\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}$ sont orthogonaux.
Représenter sur un dessin les points A_0, A_1, …, A_5, en supposant $\theta = \dfrac{\Pi}{3}$ et en prenant 2 cm pour unité de longueur.

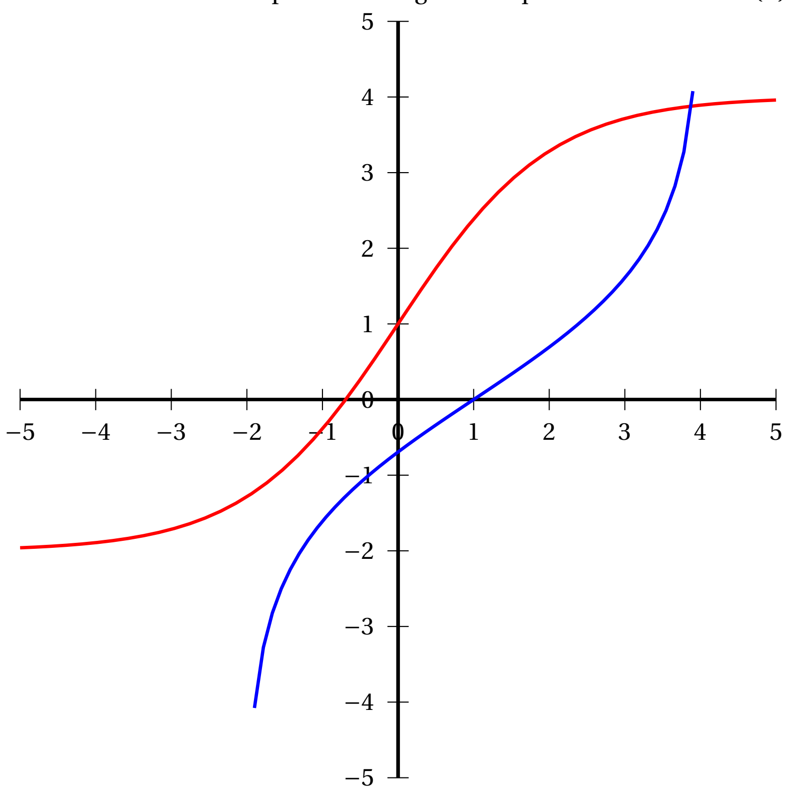
II.

Soit la fonction réelle g de la variable réelle x définie par

$$g(x) = \frac{4\mathrm{e}^x - 2}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

1. Étudier les variations de g et tracer sa courbe représentative (Γ) dans le même repère que pour (C).

2. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} ; déterminer $g^{-1}(x)$.
En déduire une particularité géométrique entre les courbes (Γ) et (C).



III.

1. Vérifier que la fonction G définie par

$$G(x) = -2x + 6\text{Log}\ \left(\text{e}^x + 1\right)$$

est une primitive de g.

2. Calculer l'aire de la portion de plan comprise entre l'axe des x, la courbe v et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \text{Log}\,(4)$. En donner une valeur approchée a 10^{-2} près.

IV.

Soit le mouvement du point M défini par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 2\,\text{Log}\,t \\ y(t) & = & \dfrac{4t^2-2}{t^2+1} \end{array}\right. \text{où } t \text{ est strictement positif.}$$

1. Quelle est la trajectoire du mouvement du point M ?

2. Donner les coordonnées des vecteurs vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ et accélération $\overrightarrow{\Gamma(t)}$ du mouvement du point M à l'instant t.

3. Pour quelle valeur t_0 de t le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma\,(t_0)}$) est-il parallèle à l'axe des x ?

Déterminer alors la position $M\,(t_0)$ du point M sur la trajectoire, le vecteur vitesse $\overrightarrow{V\,(t_0)}$ et le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma\,(t_0)}$ à l'instant t_0.