∽ **Baccalauréat C Montpellier** juin 1981 ∾

EXERCICE 1

E est un espace vectoriel réel euclidien de dimension 3, $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ une base orthonormée de E, F l'endomorphisme de E tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} F\left(\vec{\imath}\right) & = & \frac{1}{3}\left(\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 5\vec{k}\right);\\ F\left(\vec{\jmath}\right) & = & \frac{1}{3}\left(-2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}\right);\\ F\left(\vec{k}\right) & = & \frac{1}{3}\left(5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}\right).\end{array}\right.$$

1. Démontrer que l'image de F est un plan vectoriel P orthogonal au noyau de F.
2. Démontrer que le couple $\mathcal{B} = \left(\vec{\imath} + \vec{k}\ ;\ \vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}\right)$ est une base orthogonale de P ; f désignant la restriction de F à P, déterminer la matrice de f relative à la base $\mathcal{B}$ et reconnaître $\frac{1}{2}f$.
3. Montrer que F peut être considéré comme composée de trois applications simples que l'on déterminera.

EXERCICE 2

Soit A = $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

1. Discuter suivant a le nombre de solutions de l'équation

$$x^2 = a, \quad a \in \text{A}, \quad x \in \text{A}.$$

2. Montrer que dans A, l'équation $x^2 - \dot{2}px + q = \dot{0}$ ($p \in$ A, $q \in$ A) a deux solutions (distinctes ou confondues) si, et seulement si, $p^2 - q$ appartient à un sous-ensemble B (à déterminer) de A.
3. Résoudre alors l'équation $x^4 + 3x^2 + \dot{4} = \dot{0}$ dans A.
4. Déterminer les entiers x tels que le nombre qui s'écrit $\overline{10304}$ en base x soit divisible par 11.

PROBLÈME

On note E l'ensemble des fonctions numériques définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ et admettant pour tout n de $N^\star$ une dérivée n-ième sur $]0\ ;\ +\infty[$.
On rappelle que E muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Partie A

Pour tout élément f de E, on désigne par g l'application de $]0\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = xf'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée première de f

1. **a.** Calculer $g'(x)$, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$.

b. Vérifier, par récurrence, que pour tout n de $N^{\star}$:

$$\forall x \in]0\,;\,+\infty[, \quad g^{(n)}(x) = xf^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x),$$

où $f^{(n)}$ désigne, pour tout n de $N^{\star}$, la dérivée n-ième de f.
En déduire que g est élément de E.

2. Soit φ l'application de E dans E définie par $\varphi(f) = g$. Montrer que φ est une application linéaire de E dans E.

3. On pose $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$.

a. Pour toute application f de E, on pose $h = \varphi^2(f)$.
Montrer que

$$\forall x \in]0\,;\,+\infty[, \quad h(x) = x^2 f''(x) + xf'(x).$$

b. En utilisant 1. a, montrer que le noyau de $\varphi^2(f)$ est un sous-espace vectoriel de E, de dimension 2, dont une base est formée des deux applications f_1 et f_2 de E définies par :

$$\begin{array}{lrcl} \forall x \in]0\,;\,+\infty[, & f_1(x) & = & \text{Log}\,x \\ \forall x \in]0\,;\,+\infty[, & f_2(x) & = & 1 \end{array}$$

Partie B

1. Étudier les variations de la fonction f définie de $]0\,;\,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{\text{Log}\,x}{x}.$$

Construire, dans le plan affine $\mathcal{P}$ rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ tel que $\left\|\vec{\imath}\right\| = \left\|\vec{\jmath}\right\| = 2$ cm, la courbe représentative de f.

2. Vérifier par récurrence que, pour tout n de $N^{\star}$, il existe un couple $(u_n\,;\,v_n)$ de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in]0\,;\,+\infty[, \quad f^{(n)}(x) = \frac{u_n + v_n \text{Log}\,x}{x^{n+1}}.$$

En déduire que f est élément de E.

3. Soit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\star}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^{\star}}$ définies par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_1 & = & 1, \\ v_1 & = & -1, \\ u_{n+1} & = & v_n - (n+1)u_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^{\star} \\ v_{n+1} & = & -(n+1)v_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^{\star} \end{array}\right.$$

a. Exprimer v_n en fonction de n.

b. Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^{\star}$, on a

$$u_n = (-1)^{n+1} n!\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

Partie C

Soit F l'ensemble des fonctions $f_{a,\,b}$ de $]0\,;\,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f_{a,\,b}(x) = \frac{a\text{Log}\,x + b}{x} \text{ où } (a,\ b) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E dont $\left(f_{1,\,0},\ f_{0,\,1}\right)$ est une base.

2. **a.** Établir : $\forall f \in F,\ \varphi(f) \in F$ (φ est l'application définie au A 2.).

b. On note $\overline{\varphi}$ la restriction de φ à F.
Écrire la matrice M de $\overline{\varphi}$ dans la base $\left(f_{1,\,0},\ f_{0,\,1}\right)$.
Montrer que $\overline{\varphi}$ est bijective.
Écrire, dans la même base $\left(f_{1,\,0},\ f_{0,\,1}\right)$ les matrices de $\overline{\varphi}^2$ et de $\overline{\varphi}^{-1}$.

c. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^\star$.

$$M^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ n(-1)^{n+1} & (-1)^n \end{pmatrix}$$

Partie D

On se propose de déterminer les éléments f de E vérifiant

$$(1) \qquad \varphi^2(f) = f_{1,\,4}$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in]0\,;\,+\infty[, \quad x^2 f''(x) + x f'(x) = \frac{4 + \text{Log}\,x}{x}.$$

1. Montrer qu'il existe un unique élément f_0 de F vérifiant (1).

2. Soit $f \in$ E. Établir que f vérifie (1) si, et seulement si, $\left(f - f_0\right) \in \text{Ker}\left(\varphi^2\right)$. En déduire l'ensemble des fonctions de E qui vérifient (1).