Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C juin 1982 Montpellier ∽

EXERCICE 1 **4 points**

On considère l'application

$$\begin{array}{rcl}\varphi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^{\star}\\ (n,\ p) & \longmapsto & 2^n(2p+1).\end{array}$$

1. **a.** Calculer $\varphi(0,\ 0)$, $\varphi(3,\ 4)$ et $\varphi(2,\ 6)$.
   b. Décomposer 1 584 en produit de facteurs premiers. Déterminer l'antécédent de 1 584 par φ.
   c. Montrer que φ est bijective.
2. On définit une loi de composition interne notée T dans $\mathbb{N}^2$ par :

$$\forall(n,\ p)\in\mathbb{N}^2,\ \forall(n',\ p')\in\mathbb{N}^2,\quad (n,\ p)T(n',\ p') = (n+n',\ 2pp'+p+p').$$

   a. Calculer (3, 4) T(2, 6).
   b. Résoudre l'équation (3, 4) T (n, p) = (4, 49).
   c. Démontrer que l'application φ est un isomorphisme de $\left(\mathbb{N}^2,\ \text{T}\right)$ sur $\left(N^{\star},\ \times\right)$.
   d. Est-ce que $\left(\mathbb{N}^2,\ \text{T}\right)$ admet un élément neutre ? Quels sont les éléments symétrisables ?

EXERCICE 2 **4 points**

On considère dans $\mathbb{C}$ les complexes z_1 et z_2 de module 1 et d'arguments respectifs α et β.

1. Montrer que $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}$ est un réel positif ou nul. Dans quel cas est-il nul ?
2. Soit deux points A et B d'un plan complexe d'origine O d'affixes respectives a et b (on supposera O, A et B non alignés).
   Calculer en fonction de a et b l'affixe z du point I barycentre de (A, $|b|$) et (B, $|a|$).
3. À l'aide du 1. montrer que $\dfrac{z^2}{ab}$ est un réel strictement positif.
   Exprimer $\arg z$ en fonction de $\arg a$ et $\arg b$. En déduire que $\overrightarrow{\text{OI}}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle des demi-droites de vecteurs directeurs $\overrightarrow{\text{OA}}$ et $\overrightarrow{\text{OB}}$.

PROBLÈME **12 points**

Partie A

Soit E l'ensemble des matrices de la forme :

$$M_{(a,\ b)} = \begin{pmatrix} a+b & 0\\ a & b-a\end{pmatrix}\quad \text{où}\ (a,\ b)\in\mathbb{R}^2.$$

On pose $I = M_{(0,\ 1)}$ et $J = M_{(1,\ 0)}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de base (I, J) de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices 2×2.
2. Calculer J^2. En déduire que si $M \in \text{E}$, $M' \in \text{E}$ alors $M \times M' \in \text{E}$.
   Montrer que (E, +, ×) est un anneau commutatif unitaire.
3. Quelles sont les matrices $M_{(a,\ b)}$ inversibles dans E ? Exprimer alors $M^{-1}_{(a,\ b)}$ dans la base $(I,\ J)$.

Partie B

Dans ce qui suit on suppose $b = 0$.
Soit V le plan vectoriel euclidien de base orthonormée $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Soit P un plan affine d'espace vectoriel associé V ; P est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Soit f_a l'application affine de P dans P dont l'endomorphisme associé a pour matrice dans $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$

$$M_{(a,\ 0)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & -a \end{pmatrix}$$

et qui au point O fait correspondre le point $\text{O}'(0\ ;\ a+3)$.

1. Déterminer analytiquement f_a.
2. Pour quelles valeurs de a, f_a est-elle une bijection ?
   Déterminer analytiquement, quand elle existe f_a^{-1}.
3. Déterminer suivant les valeurs de a, l'ensemble D des points invariants par f_a.
4. Démontrer que seule l'application f_1, obtenue pour la valeur 1 du paramètre a, est une involution que l'on caractérisera.
5. f_a peut-elle être une isométrie ?
6. On prend $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$. Soit G le barycentre des points $\text{A}(\alpha\ ;\ \alpha)$, $\text{B}(\alpha\ ;\ 2)$, $\text{C}\left(\alpha\ ;\ -2\dfrac{\text{Log}\,\alpha}{\alpha}\right)$.
   Trouver les coordonnées de G ; en déduire une équation cartésienne de la courbe décrite par G quand α varie dans $\mathbb{R}_+^\star$.
7. Soient A_1, B_1, C_1 les images des points A, B, C par l'application f_1 (définie en B 4.).
   Soit G_1 le barycentre de A_1, B_1, C_1 respectivement affectés de 1, 2, −1.
   Trouver une équation cartésienne de la courbe décrite par G_1 quand α varie dans $\mathbb{R}_+^\star$.

Partie C

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ de la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :

$$g(x) = \frac{x}{2} + 2 + \frac{\text{Log}\,x}{x}.$$

1. On considère la fonction

$$h : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 2\text{Log}\,x + 2 \end{array} \right.$$

   Étudier les variations de h et préciser le signe de $h(x)$. (On ne demande pas de tracer la courbe représentative de h).
2. Étudier les variations de la fonction g. Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ a deux asymptotes que l'on déterminera. Montrer que $(\mathcal{C})$ coupe l'une de ces asymptotes en un point que l'on précisera. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

3. Soit $(\mathscr{C}_1)$ la transformée de $(\mathscr{C})$ par f_1 (définie dans B 4.).

a. Écrire une équation de $(\mathscr{C}_1)$. ($(\mathscr{C}_1)$ est la courbe représentative d'une fonction g_1).

b. Montrer que $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}_1)$ ont les mêmes droites asymptotes. Tracer $(\mathscr{C}_1)$ dans le même repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ que $(\mathscr{C})$ sans étudier g_1.

4. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la droite d'équation $x = 1$, la droite d'équation $x = m\,(m > 1)$ et les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}_1)$.