Baccalauréat C Montpellier juin 1984

EXERCICE 1 **4 POINTS**

On se propose d'étudier une fonction numérique f et de préciser sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
ln désigne la fonction logarithme népérien.
f est la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\left\{\begin{array}{l c l l} f(x) & = & x\ln\left(x+\dfrac{1}{x}\right) & \forall x \in \mathbb{R}_+^\star \\ f(0) & = & 0. & \end{array}\right.$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en zéro.
2. On considère la fonction g pour x appartenant à $[1 ; +\infty[$ par $g(x) = x\ln x$ et on appelle Γ sa courbe représentative dans le même repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

   Étudier g et tracer Γ.
3. Étudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
   Montrer que les courbes Γ et $\mathscr{C}$ sont asymptotes et préciser leurs positions relatives.
4. Déterminer f' et f'' puis étudier le sens de variation de f' et montrer que f' est positive.
   Achever l'étude de la fonction f.
   Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur la même figure que Γ.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Dans P, plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ deux points A et B ont pour coordonnées respectives $(-a ; 0)$ et $(a ; 0)$. (a réel strictement positif.)
r_{A} est la rotation de centre A, d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$.
r_{B} est la rotation de centre B, d'angle de mesure $\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$.
Pour tout point M du plan P, on note $M_{\text{A}} = r_{\text{A}}(M)$ et $M_{\text{B}} = r_{\text{B}}(M)$.

1. M étant un point donné de P, construire les points M_{A} et M_{B} : justifier la construction.
2. Démontrer que le milieu du segment $[M_{\text{A}}M_{\text{B}}]$ est un point fixe indépendant du choix de M.
   a. en composant les applications r_{A}^{-1} puis r_{B} ;
   b. en utilisant les nombres complexes.
3. Démontrer, par le procédé de votre choix, que lorsque $M \neq M_{\text{A}}$ et $M \neq M_{\text{B}}$,

$$\text{mes}\left(\overrightarrow{MM_{\text{A}}}, \overrightarrow{MM_{\text{B}}}\right) = \text{mes}\left(\overrightarrow{M\text{A}}, \overrightarrow{M\text{B}}\right) + \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

   En déduire

$$\text{mes}\,(MM_{\text{A}}, MM_{\text{B}}) = \text{mes}\,(M\text{A}, M\text{B}) + \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

   Quel est l'ensemble des points M du plan P tels que M, M_{A}, M_{B} soient alignés ?
   Construire cet ensemble.
   N.B. : Les mesures des angles sont exprimées en radians.

PROBLÈME **12 POINTS**

On recense une population tous les 40 ans.
Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution de cette population suivant un modèle particulier que l'on précise à partir de trois recensements.

Partie A Présentation concrète

La population, pour la tranche d'âge de 0 à 80 ans, a été recensée en 1900, 1940 et 1980, en séparant les deux classes d'âges suivantes :

- la classe A constituée par tous les individus d'âge inférieur ou égal à 40 ans ;
- la classe B constituée par tous les individus d'âge strictement supérieur à 40 ans et d'âge inférieur ou égal à 80 ans.

Les recensements de 1900, 1940, 1980 ont donné les résultats suivants (effectifs en millions d'habitants) :

Années	Classe A	Classe B	Total
1900	$a_0 = 30$	$h_0 = 20$	$t_0 = 50$
1940	$a_1 = 28$	$h_1 = 24$	$t_1 = 52$
1980	$a_2 = 28,8$	$h_2 = 22,4$	$t_2 = 51,2$

On suppose que les classes ont évolué de telle sorte qu'il existe trois coefficients fixes α, β, γ tels que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_1 & = & \alpha a_0 + b_0 \\ b_1 & = & \gamma a_0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} a_2 & = & \alpha a_1 + b_1 \\ b_2 & = & \gamma a_1 \end{array}\right.$$

1. Avec les données ci-dessus, calculer α, β, γ.
2. On note a_n l'effectif de la classe A au recensement de l'année $(1900 + 40n)$.
   On note b_n l'effectif de la classe B au recensement de l'année $(1900 + 40n)$.
   On suppose que le modèle exposant le renouvellement des classes A et B se conserve pour tous les recensements avec les mêmes coefficients α, β, γ.
   Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n, b_n, α, β, γ.

Partie B

On se propose d'étudier les suites v et w vérifiant :

$$(1) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left\{\begin{array}{lcl} v_{n+1} & = & \alpha v_n + \beta w_n \\ w_{n+1} & = & \gamma v_n. \end{array}\right.$$

α, β, γ sont trois réels donnés dans l'intervalle $]0 ; 1[$,

1. Montrer que $v_{n+2} = \alpha v_{n+1}\beta\gamma v_n$pour tout n de $\mathbb{N}$.
   En déduire que si q_1 et q_2 sont deux réels distincts de somme α et de produit $(-\beta\gamma)$, alors les suites
   $$\left(v_{n+1} - q_1 v_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \left(v_{n+1} - q_2 v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
   sont géométriques et de raisons respectives q_2 et q_1.
   En déduire $v_{n+1} - q_1 v_n$, $v_{n+1} - q_2 v_n$, puis v_n en fonction de v_0, v_1, q_1, q_2, n.
   (On ne cherchera pas ici à calculer q_1 et q_2)
   Exprimer de même w_n.
2. Calculer q_1 et q_2 puis $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ dans le cas particulier suivant :
   $\alpha = 0,6$, $\beta = 0,5$, $\gamma = 0,8$.

3. Dans les notations de la première partie, en déduire a_n et b_n en fonction de n. Préciser aussi $t_n = a_n + b_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n$.

Que pensez-vous de l'évolution à long terme (on peut dire : n tendant vers l'infini) de la population décrite dans la première partie ?

Partie C

α, β, γ sont toujours trois réels dans l'intervalle $]0\ ;\ 1[$,

1. On suppose que les suites v et w ont des limites finies non nulles.

Montrer en utilisant les relations (1) que nécessairement $\alpha + \beta\gamma = 1$.

2. Réciproquement, si $\alpha + \beta\gamma = 1$, montrer que les suites v et w sont convergentes. (on pourra vérifier que q_1 et q_2 prennent les valeurs 1 et $(\alpha - 1)$.

Remarque ne faisant l'objet d'aucune démonstration

La condition $\alpha + \beta\gamma = 1$ est donc un critère permettant, pour ce modèle, de prévoir l'existence à long terme d'un équilibre pour la population,

Si cette condition n'est pas vérifiée, on peut montrer que la population est :

— soit en voie d'expansion $\alpha + \beta\gamma > 1$,
— soit en voie d'extinction $\alpha + \beta\gamma < 1$.