∽ Baccalauréat C Montpellier septembre 1980 ∾

I.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & x - x\text{Log}\,x\\ f(0) & = & 0.\end{array}\right.$$

1. Cette fonction est-elle continue à droite pour $x = 0$?
   Cette fonction est-elle dérivable à droite pour $x = 0$?
2. Étudier la fonction f. Construire la courbe représentative C de cette fonction dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité : 2 cm).
3. Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la portion de plan, ensemble des points $M(x\,;\ y)$ tels que

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \alpha & \leqslant & x & \leqslant & \text{e}\\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x)\end{array}\right.$$

   $0 < \alpha < \text{e}$.
   Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 par valeurs positives.

II.

1. On considère l'ensemble $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}\}$.
   Résoudre dans cet ensemble le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{3}x + \dot{2}y & = & \dot{0}\\ x + \dot{2}y & = & \dot{4}\end{array}\right.$$

2. On considère maintenant l'ensemble

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}\}.$$

   a. Résoudre, dans cet ensemble, le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{3}x + \dot{2}y & = & \dot{0}\\ x + \dot{2}y & = & \dot{4}\end{array}\right.$$

   b. Déterminer les éléments a de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ pour que le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{3}x + \dot{2}y & = & \dot{0}\\ x + \dot{2}y & = & \dot{4}\end{array}\right.$$

   n'ait aucune solution.

III.

Partie A

$\overrightarrow{P}$ est le plan vectoriel euclidien et $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ une base orthonormée de $\overrightarrow{P}$. On appelle endomorphisme de $\overrightarrow{P}$ une application linéaire de $\overrightarrow{P}$ dans $\overrightarrow{P}$.

Pour tout réel λ, soit φ_λ l'endomorphisme de $\overrightarrow{P}$ dont la dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est

$$m_\lambda = \begin{pmatrix} 6\lambda - 3 & 7\lambda - 3\\ 7\lambda - 3 & -3\end{pmatrix}$$

1. Déterminer suivant les valeurs de λ le noyau et l'image de φ_λ.
2. Pour chacun des deux endomorphismes φ_λ non bijectifs :
   - **a.** Montrer que le noyau et l'image sont deux droites vectorielles orthogonales.
   - **b.** Écrire la matrice de φ_λ dans une base orthonormée formée d'un vecteur du noyau et d'un vecteur de l'image.
   - **c.** Montrer qu'il existe une homothétie vectorielle h et une projection vectorielle orthogonale p sur une droite vectorielle $\overrightarrow{D}$ telles que

$$\varphi_\lambda = h \circ p = p \circ h.$$

Partie B

Dans la suite du problème P désigne le plan affine associé à $\overrightarrow{P}$ et $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ un repère orthonormé de P. f_λ est l'application affine dont l'endomorphisme associé est φ_λ et telle que $f_\lambda(0) = 0$.

1. Étude du cas $\lambda = 1$.
   Montrer que f_1 est une similitude dont on déterminera les éléments.
2. On donne la courbe C d'équation $x = \dfrac{1}{2}y^2 + 6y - 4$; déterminer sa nature et la tracer dans le plan P [repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$].
   Trouver l'équation de la courbe C' transformée de C par l'application $f_{\frac{1}{2}}$. Préciser la nature de C' et construire C'.
3. On considère la parabole d'équation $y = x^2 - 2$.
   Déterminer sa tangente au point d'abscisse x_0 avec $x_0 \neq 0$ et calculer en fonction de x_0 l'abscisse de son point d'intersection avec l'axe des abscisses $(x'x)$.
4. On considère maintenant la suite de terme général U_n telle que

$$\left\{\begin{array}{lcl} U_1 & = & \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}\left(U_n + \dfrac{2}{U_n}\right), \; n \in \mathbb{N}^* \end{array}\right.$$

   - **a.** Montrer que pour tout n, $U_n > 0$.
   - **b.** Montrer que $U_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(U_n - \sqrt{2}\right)^2}{U_n}$.
     En déduire que, pour tout n, $U_n > \sqrt{2}$.
   - **c.** Montrer que $U_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}\left(U_n - \sqrt{2}\right) + \dfrac{1}{U_n} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
     En déduire que, pour tout n, $U_n - \sqrt{2} < \dfrac{1}{2^n}$ (on pourra faire une démonstration par récurrence).
   - **d.** U_n admet-il une limite quand n tend vers $+\infty$? Si oui,la calculer.
   - **e.** Interpréter graphiquement ces résultats en utilisant le **3.**