

Durée : 4 heures

⌘ Baccalauréat C Montpellier septembre 1969 ⌘

EXERCICE 1

Résoudre le système d'inéquations

$$\begin{cases} \cos 2x - 3 \cos x + 2 < 0, \\ 0 \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

Représenter, sur un cercle trigonométrique, les solutions de ce système.

EXERCICE 2

1. Construire le graphe de la fonction f de la variable x , définie par

$$f(x) = x\sqrt{2-x}.$$

Déterminer la tangente au graphe au point d'abscisse 2.

2. Utiliser le graphe pour discuter, suivant les valeurs de m , le nombre et le signe des racines de l'équation

$$x\sqrt{2-x} - m = 0.$$

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox , Oy . On désigne par E l'ensemble des points du plan non situés sur la droite d'équation $x = 0$.

On désigne par T la transformation ponctuelle qui, à tout point M , de coordonnées x et y , appartenant à E , associe le point M' , de coordonnées

$$x' = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad y' = -\frac{y}{x}.$$

On écrira, dans ce cas, $M' = T(M)$.

1. Montrer que T applique l'ensemble E dans lui-même et qu'elle est une transformation involutive.
2. Soit I le point de coordonnées $(+1; 0)$. Montrer que les trois points I , M et M' sont alignés.
Déterminer l'ensemble, D , des points M tels que I soit le milieu de MM' .
3. Lorsque M n'appartient pas à D , on appelle I' le conjugué harmonique de I par rapport à M et M' et J la projection orthogonale de I' sur l'axe des x .
Démontrer que J est indépendant du point M .
En déduire une construction de M' à partir de M si ce dernier n'appartient pas à l'axe des x .
Donner une construction de M' si M appartient à l'axe des x ; on pourra utiliser, pour cela, le point K , de coordonnées $(0; +1)$.
4. Il est convenu, pour toute la suite, que, sur les courbes dont il sera question, seuls seront considérés les points appartenant à l'ensemble E (c'est-à-dire que, toutes les fois qu'une équation en x et y sera écrite, la condition supplémentaire $x \neq 0$ sera sous-entendue).
On appelle $C(\alpha, R)$ le cercle d'équation

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - R^2 = 0,$$

α désignant un réel quelconque et R un réel strictement positif.

Écrire l'équation de la courbe $\Gamma(\alpha, R)$, transformée du cercle précédent par l'application T .

On appelle L et L' les points de contact du cercle $C(\alpha, R)$ avec ses tangentes parallèles à Ox .

Exprimer les coordonnées de ces deux points en fonction de α et R .

Déterminer les deux ensembles Λ_1 et Λ_2 , ensembles des positions de L et L' correspondant à des valeurs de α et R qui réalisent respectivement les deux circonstances suivantes :

- a. $\Gamma(\alpha, R)$ est un cercle ; comparer dans ce cas $C(\alpha, R)$ et $\Gamma(\alpha, R)$;
- b. $\Gamma(\alpha, R)$ est une parabole. Dessiner ces deux ensembles.