∽ Baccalauréat C Montpellier septembre 1976 ∾

EXERCICE 1

Résoudre successivement dans l'ensemble $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ les équations :
$\dot{2}x = \dot{1}$
$x^2 + \dot{4}x + \dot{3} = \dot{0}$
$x^4 + \dot{4}x^2 + \dot{3} = \dot{0}$

EXERCICE 2

On considère, dans le plan complexe, un point M, d'affixe u et les points M' et M'' qui ont respectivement pour affixes les racines Z' et Z'' de l'équation :

$$Z^2 - 2(u+1)Z + 2u^2 + 2u + 1 = 0 \quad \text{où } Z \text{ est l'inconnue.}$$

1. Résoudre cette équation dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
2. Trouver l'ensemble des points M tels que la distance de M' à M'' soit égale à 2. Quel est alors l'ensemble des points M' et M'' ?

PROBLÈME

Les parties A et B sont indépendantes.

1. Soit E un espace vectoriel de base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
   On considère l'application linéaire φ de E dans E, définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi\left(\vec{\imath}\right) & = & \vec{\imath} \\ \varphi\left(\vec{\jmath}\right) & = & -\vec{\imath} + 2\vec{k} \\ \varphi\left(\vec{k}\right) & = & \vec{k} \end{array}\right.$$

   a. Déterminer le noyau de φ, son image et l'ensemble des vecteurs invariants.

   b. Préciser la nature de φ.

2. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine associé à E, de repère cartésien $\left(\mathrm{O}\,;\, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On appelle f l'application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$, associée à l'application linéaire φ et telle que $f(\mathrm{O}) = \mathrm{O}$.

   a. Montrer que tout point M de $\mathscr{E}$ de coordonnées $(x\,;\, y\,;\, z)$ a pour image par f le point M' de coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x - y \\ y' & = & 0 \\ z' & = & 2y + z \end{array}\right.$$

   Définir géométriquement f.

   b. Soit P le plan de repère cartésien $\left(\mathrm{O}\,;\, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On considère la droite (D) d'équations : $x = 2$ et $z = 0$ et la droite (Δ) d'équations : $x - 2y - 2 = 0$ et $z = 0$. (Ces droites sont donc contenues dans P).
   Déterminer les images de (D) et (Δ) par l'application f.

Partie B

1. On suppose maintenant E euclidien et le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ orthonormé.

   Construire, par rapport au repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ du plan P, la courbe H d'équation :

$$y = \frac{x^2-4x+5}{2x-4}.$$

2. Déterminer la courbe H' image de H par l'application f étudiée dans la partie A - 2.
   Préciser sa nature et ses éléments remarquables.

3. On considère un point mobile M dont les coordonnées dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ sont définies, à l'instant t, par les relations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2+\dfrac{1+\sin t}{\cos t}\\ y & = & \dfrac{1}{\cos t}\\ z & = & 0\end{array}\right. \qquad \text{avec } t \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$$

   a. Montrer que la trajectoire de M est une partie de H.

   b. Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse de M à l'instant t.

   c. Le point M', image de M par f, est aussi un point mobile.
   Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse de M' à l'instant t. La vitesse de M' peut-elle être, à un instant t, double de celle de M ?
   Montrer que le vecteur vitesse de M' est le transformé par φ du vecteur vitesse de M.