∽ Baccalauréat C Montpellier septembre 1977 ∾

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Soit l'équation :

$$\mathrm{e}^{x} - 2\mathrm{e}^{-x} = m \quad (m \in \mathbb{R})$$

(e est la base des logarithmes népériens)

1. Exprimer x en fonction de m.
2. Pour $m = \dfrac{1}{2}$, calculer la valeur approchée de x avec la précision donnée par la table de logarithmes.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

$\mathscr{P}$ est le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$. On considère les applications :

$$f' : \begin{array}{ccc} \mathscr{P} & \to \mathscr{P} & \\ M & \longmapsto & M' \end{array} \qquad f'' : \begin{array}{ccc} \mathscr{P} & \to \mathscr{P} & \\ M & \longmapsto & M'' \end{array}$$

où M, M' et M'' ont respectivement pour affixes z, z' et z'' avec :

$$\begin{array}{lcl} z' & = & (2-2\mathrm{i})z+1 \\ z'' & = & (2+2\mathrm{i})\overline{z}+1 \end{array}$$

1. Reconnaître f' et f'' et trouver leurs éléments canoniques.
2. Calculer $\overline{z'}$; comparer $\overline{z'}$ et z'', en déduire que $f'' = s \circ f'$ où s désigne la symétrie orthogonale ayant pour axe la droite de repère $\left(\mathrm{O},\, \vec{\imath}\right)$.
3. **a.** Construire la courbe (Γ) d'équation $4x^2 - 4y^2 = 1$.

   b. Déterminer les équations cartésiennes de $f'(\Gamma)$ et $f''(\Gamma)$.

PROBLÈME **12 POINTS**

Soit la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+3x+6}{2x-4} \end{array} \right.$

1. Montrer qu'existent a, b, c réels tels que, pour tout x différent de 2 :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2x-4}.$$

2. Étudier la fonction f, construire la courbe représentative C dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$. Montrer que C admet une asymptote oblique et un centre de symétrie ω.
3. Déterminer l'équation $Y = F(X)$ de la courbe C dans le repère $\left(\omega,\, \vec{\imath},\, \vec{\imath}\right)$.

   a. Montrer que le produit XY des coordonnées d'un point de C par rapport au repère $\left(\omega,\, \vec{\imath},\, \vec{\imath}\right)$, est strictement supérieur à 8.

b. Discuter, selon les valeurs du paramètre t, l'intersection de la droite D_t d'équation $Y = tX$ et de la courbe C. Exprimer en fonction de t les coordonnées $(X\ ;\ Y)$ des points d'intersection quand ils existent.

Retrouver en étudiant les variations de la fonction $t \longmapsto XY$ le résultat du a.

4. H désigne la courbe qui a pour équation $y = \dfrac{8}{x-2}$ dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Soit v_n l'aire de la portion de plan limitée par les droites d'équations $x = 6$, $x = 6 + n$ $(n \in N^{\star})$ et les courbes C et H.

a. Exprimer v_n en fonction de n.

b. Montrer que la somme des carrés des n premiers entiers naturels non nuls est égale

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

En déduire la somme $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ en fonction de n.

c. Montrer que le plus petit entier naturel n satisfaisant à la condition $s_n > 100$ est 6.

5. On considère maintenant la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 10, \quad u_1 = \frac{4}{5} f\left(u_0\right), \ldots, \ u_n = \frac{4}{5} f\left(u_{n-1}\right).$$

Calculer u_1.

a. Exprimer $u_n - 2$ en fonction de u_{n-1}.

Montrer que $(u_n - 2)\,(u_{n-1} - 2)$ est positif quel que soit n et en déduire que $u_n - 2$ est positif quel que soit n.

Calculer $u_n - 6$ et montrer que $u_n - 6$ est positif quel que soit n.

b. Démontrer l'inégalité : 2

$$u_n - 6 < \frac{\left(u_{n-1} - 6\right)^2}{10}$$

[On pourra chercher le signe de la différence $\dfrac{\left(u_{n-1} - 6\right)^2}{10} - (u_n - 6)$].

c. En raisonnant par récurrence prouver que :

$$u_n - 6 < 10 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2^n}.$$

En déduire que la suite (u_n) converge et calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$.