ൟ Baccalauréat C Montpellier septembre 1973 ൟ

EXERCICE 1

Déterminer, dans le système décimal, le nombre n de trois chiffres, qui s'écrit $\overline{xyz}$ en base sept et $\overline{zyx}$ en base neuf.

EXERCICE 2

Étudier les variations de la fonction f de la variable réelle x telle que

$$f(x) = \frac{x^2}{\log x^3}$$

et construire la courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère dont l'unité de longueur sera prise égale à 2cm ($\log x$ représente le logarithme népérien du nombre x).
On donne $\text{e} \approx 2{,}1783$; $\log 2 \approx 0{,}6931$; $\log 3 \approx 1{,}0986$; $\log 5 \approx 1{,}6094$.

EXERCICE 3

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$.
P désigne l'ensemble des points de ce plan d'abscisses non nulles. On considère l'application f de P dans P définie ainsi

$$m(x\,;\,y) \longmapsto f(m) = \text{M}(X\,;\,Y) \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{lcl} X &=& \dfrac{1}{x}\\ Y &=& y\end{array}\right.$$

où $(x\,;\,y)$ sont les coordonnées du point m dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ et $(X\,;\,Y)$ sont les coordonnées du point M dans le même repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Démontrer que f est une involution de P.
2. Quels sont les points invariants par f ?
3. Le point $\text{A}(\alpha\,;\,\beta)$ étant donné, quels sont les points m tels que $d(\text{A}m) = d(\text{AM})$?
   M désigne l'image de m par f et $d(\text{A}m)$ et $d(\text{AM})$ désignent des distances euclidiennes.
   Discuter selon la position du point A dans le plan.

Partie B

On considère l'ellipse d'équation

$$\frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$$

et (E) désigne l'ensemble des points de cette ellipse, à l'exception du point O, origine du repère.

1. Quelle est l'équation cartésienne de la courbe (C), transformée de (E) par f ?
2. Étudier la fonction

$$X \longmapsto Y = \sqrt{\frac{1}{X} - \frac{1}{4X^2}}$$

   et construire sa courbe représentative (Γ_1).

3. (Γ_2) désignant la courbe symétrique de (Γ_1) par rapport à $x'Ox$, montrer que $(C) = (\Gamma_1) \cup (\Gamma_2)$.
4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de (Γ_1) et de (E).
   On désignera par K celui de ces points qui a pour abscisse $+1$.

Partie C

m est maintenant un point mobile dont les coordonnées en fonction du temps sont

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2\cos t + 2, \\ y & = & \sin t \end{array}\right. \qquad -\pi < t < \pi,$$

M désigne toujours l'image de m par l'application f.

1. Quelle est la trajectoire de m quand t décrit $]-\pi\ ;\ +\pi[$?
2. Les points m et M se rencontrent-ils à une date t_0 avec $0 < t_0 < \pi$?
   Quelle est leur position à cette date ?
   Quels sont les vecteurs vitesse de m et M à cette date et quelle particularité ces vecteurs présentent-ils ?