Baccalauréat C septembre 1981 Montpellier

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel.

1. Trouver suivant les valeurs de n, les restes de la division de 5^n par 13.
2. En déduire que $1981^{1981} - 5$ est divisible par 13.

EXERCICE 2

Dans un plan affine euclidien, on considère un triangle équilatéral ABC. On pose

$$\left\|\overrightarrow{\text{AB}}\right\| = \left\|\overrightarrow{\text{BC}}\right\| = \left\|\overrightarrow{\text{CA}}\right\| = a, \quad a > 0.$$

1. Déterminer le point G barycentre du système
$$\{(\text{A},\ 2)\ (\text{B},\ 1)\ (\text{C},\ 1)\}.$$
2. Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan qui vérifient
$$2\,\overrightarrow{M\text{A}}^2 + \overrightarrow{M\text{B}}^2 + \overrightarrow{M\text{C}}^2 = 2a^2.$$
3. Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points M du plan qui vérifient
$$2\,\overrightarrow{M\text{A}}^2 + \overrightarrow{M\text{A}}.\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{A}}.\overrightarrow{M\text{C}} = \frac{3a^2}{2}$$
(On pourra utiliser le point G et le point I milieu du segment [AG]).

EXERCICE 3

On désigne par **D** l'ensemble des fonctions numériques définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. On rappelle que **D** peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On note f_0 la fonction nulle qui à tout x réel associe 0.

1. **a.** Soit h la fonction numérique à variable réelle définie par $x \longmapsto h(x) = \text{e}^x$, e étant la base des logarithmes népériens.
Montrer, sans la calculer, que la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par
$$x \longmapsto k(x) = \int_0^x t^2 h(t)\,\text{d}t$$
appartient à **D**.
b. A l'aide de deux intégrations successives, calculer $k(x)$.
c. Soit f une fonction quelconque de **D**. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$$x \longmapsto g(x) = \int_0^x t^2 f(t)\,\text{d}t$$
appartient à **D**.
On calculera $g'(x)$ et $g''(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $f'(x)$.

2. **a.** À tout élément f de **D** on associe la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = f(x) - \int_0^x t^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que F appartient à **D**. Calculer $F'(x)$ et $F''(x)$.

b. En notant $F = \varphi(f)$, on détermine une application φ de **D** dans **D** ; montrer qu'il s'agit d'un endomorphisme.

c. On se propose de résoudre l'équation

$$\varphi(f) = f_0 \qquad (1)$$

à l'inconnue $f \in$ **D**.
Calculer $\varphi\left(f_0\right)$ et $\varphi(h)$ où h est la fonction définie au 1 a.
Calculer $\varphi(\mathrm{Id})$ où Id est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe x.
Montrer que si f est solution de (1), alors $f(0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) - x^2 f(x) = 0.$$

Si de plus on pose $f_1(x) = f(x)\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}}$, montrer que f_1 est une fonction constante dont on donnera la valeur.
En déduire que l'équation (1) n'admet pour solution que la fonction f_0.

3. Si ℓ appartient à **D**, on se propose de résoudre l'équation

$$\varphi(f) = \ell \qquad (2)$$

à l'inconnue $f \in$ **D**.

a. Démontrer que si l'équation (2) admet une solution, elle est unique.

b. Montrer que si f est solution de (2) et si l'on pose

$$f_1(x) = f(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}},$$

alors f_1 vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1'(x) = \ell'(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}}.$$

Calculer $f_1(0)$ en fonction de $\ell(0)$.
En déduire que la solution de l'équation (2) est la fonction f définie par

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}}\left(\int_0^x \ell'(t)\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}}\,\mathrm{d}t + \ell(0)\right).$$

4. **a.** On suppose que ℓ est définie par : $\ell(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}}$.
Trouver la solution de l'équation

$$f(x) - \int_0^x t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}}.$$

b. Étudier la fonction ℓ et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Montrer qu'il existe une bijection ℓ_1 de $[-1~;~+\infty[$ sur $[-3~;~+\infty[$ telle que

$$\forall x \in [-1~;~+\infty[, \quad \ell_1(x) = \ell(x).$$

On désigne par (C_1) la représentation graphique de ℓ_1.

La fonction ℓ_1 est-elle croissante ? continue ? dérivable en tout point ?

Tracer sa courbe représentative $\left(C_1'\right)$ dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

N. B. - On donne $\dfrac{1}{3\sqrt{e}} \approx 0,72$.