Durée : 4 heures

Baccalauréat C Montpellier [1] septembre 1986

EXERCICE 1 **4 points**

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(x) &=& \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{pour } x \in \left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right]\\ f(x) &=& \dfrac{4}{\mathrm{e}^2} & \text{pour } x \in \left]-\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]\\ f(x) &=& \dfrac{4}{\mathrm{e}^2} + \ln x & \text{pour } x \in]1\,;\,+\infty] \end{array}\right.$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Tracer la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
3. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$.

EXERCICE 2 **4 points**

Le plan P est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
On désigne par T l'application de P dans P qui, à tout M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = (1+\mathrm{i})z - \mathrm{i}$.

1. Montrer que T est une similitude directe de P dont on donnera les éléments caractéristiques. On notera A le point invariant de T.
   Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{A}M},\ \overrightarrow{MM'}\right)$, en supposant $M \neq \mathrm{A}$.
2. **a.** Construire M' pour un point M donné.
   b. Déterminer l'image D$'$ par T de la droite D d'équation $y = x$. Construire D$'$.
3. **a.** Montrer qu'il existe un point B du plan distinct de A et un seul tel que les affixes z_0 de B et z_0' de $\mathrm{B}' = T(\mathrm{B})$ soient liées par la relation $z_0 z_0' = 1$. Mettre en place B et B$'$.
   b. Soit A$'$ le symétrique de A par rapport à O. Montrer que les point A, A$'$, B et B$'$ sont cocycliques.

PROBLÈME ÉTUDE DE LA CISSOÏDE DE DIOCLÈS : **12 points**

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2}{1-x}}.$$

1. Dresser le tableau des variations de f

1. Aix-Marseille, Corse, Nice, Toulouse

2. Soit Γ_1 la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
   Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à la courbe Γ_1 au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.
   Tracer la courbe Γ_1 et la droite T.
3. Sur le même graphique, tracer Γ_2 courbe symétrique de Γ_1 dans la symétrie orthogonale d'axe Ox.
4. Soit $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Montrer que Γ a pour équation cartésienne :

$$\text{(E)} \qquad x\left(x^2+y^2\right)-y^2=0$$

   Γ est appelée cissoïde de Dioclès.

Partie B Interprétation géométrique de (E) :

I est le point de coordonnées (1 ; 0) dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
C est le cercle de diamètre [OI] et Δ est la tangente à C au point I.
Soit D la droite passant par O de coefficient directeur t, $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les coordonnées de M tel que $C \cap \mathrm{D} = \{\mathrm{O},~M\}$.
   Déterminer les coordonnées de M' tel que $\Gamma \cap \mathrm{D} = \{\mathrm{O},~M'\}$.
   Déterminer les coordonnées de N tel que $\Delta \cap \mathrm{D} = \{N\}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{O}M'} = \overrightarrow{MN}$.
3. Déterminer l'intersection de Γ et C.

Partie C Propriétés géométriques

Soit M un point de C, N le point d'intersection de (OM) et Δ et M' le point d'intersection de (OM) et Γ.
On considère le point P tel que OINP soit un rectangle.

1. Montrer que les triangles IMN et O$M'P$ se transforment par une symétrie centrale à déterminer.
2. En déduire que le triangle $PM'N$ est rectangle.
3. Soit F le symétrique de I par rapport à O. On considère la parabole $\mathscr{P}$ de foyer F et de directrice Δ. La droite (FP) coupe Δ en R. Construire géométriquement le point K de $\mathscr{P}$ qui se projette orthogonalement en R sur Δ.
4. Démontrer que la droite (PM') est tangente en K à $\mathscr{P}$.
5. Démontrer réciproquement que si K est un point de $\mathscr{P}$, la projection orthogonale de O sur la tangente en K à $\mathscr{P}$ est un point M' de Γ.

Remarque : Γ apparaît comme ensemble des projections orthogonales du sommet d'une parabole sur les tangentes à cette parabole. On dit pour cela que la cissoïde de Dioclès est la podaire d'une parabole par rapport à son sommet.