Baccalauréat série mathématiques
Montpellier juin 1947

I. 1er sujet

Variation et représentation graphique de la fonction

$$y = \frac{a'x + b'}{ax + b}.$$

I. 2e sujet

Équilibre d'un point matériel sur un plan ou sur une sphère.

I. 3e sujet

Inégalité des jours et des nuit aux diverses latitudes.

EXERCICE 2

Soient un triangle quelconque ABC; O et R le centre et le rayon du cercle circonscrit; A′, B′, C′ les milieux des côtés; A″, B″, C″ les pieds des hauteurs AA′, BB′, CC′ sur les côtés (A′ et A″ sont situés sur le côté BC = a).
α Questions préliminaires

1. Établir la relation

$$\cos^2 \mathrm{A} + \cos^2 \mathrm{B} + \cos^2 \mathrm{C} + 2\cos \mathrm{A} \cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C} = 1.$$

2. Exprimer le rapport $\dfrac{\mathrm{A'A''}}{\mathrm{BC}}$, des vecteurs A′A″, BC en fonction des mesures des côtés; donner ensuite une expression trigonométrique simple de ce rapport.
   Les deux autres rapports analogues seront considérés comme grandeurs algébriques et leurs expressions se déduiront de la précédente par permutation circulaire.

β Soit le système des trois équations aux trois inconnues x, y et z :

$$\begin{array}{rcl} (y+1)(z-1) & = & 4\mathrm{L} \\ (z+1)(x-1) & = & 4\mathrm{M}, \\ (x+1)(y-1) & = & 4\mathrm{N}, \end{array}$$

où L, M, N sont d'abord des nombres donnés et quelconques.
Montrer que la résolution de ce système dépend d'une équation du second degré.
Les solutions seront exprimées, dans le cas d'existence, en fonction de L, M, N et d'un nombre K défini par l'égalité

$$\mathrm{K}^2 = (\mathrm{L} + \mathrm{M} + \mathrm{N} + 1)^2 + 4\mathrm{LMN}.$$

γ On particularise la question précédente en posant, maintenant pour toute la suite du problème

$$\mathrm{L} = -\cos^2 \mathrm{A}, \quad \mathrm{M} = -\cos^2 \mathrm{B}, \quad \mathrm{N} = -\cos^2 \mathrm{C},$$

A, B, C représentant les angles d'un même triangle ABC. Constater que ce choix des données correspond à un cas de solution double.

Confronter les expressions des inconnues avec les rapports $\dfrac{\mathrm{A'A''}}{\mathrm{BC}}$ du α 2.

δ Calculer la valeur (remarquable) de l'expression

$$xyz + x + y + z;$$

du résultat de ce calcul, déduire une relation entre les trois rapports $\dfrac{\text{A}'\text{A}''}{\text{BC}}$ indépendante. des autres éléments du triangle.