Durée : 4 heures

Baccalauréat C Montpellier juin 1966
Mathématiques et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Déterminer les modules et arguments respectifs des solutions de l'équation

$$z^4 = -\text{i}.$$

Représenter géométriquement leurs images respectives.

EXERCICE 2

1. Démontrer que, dans un repère constitué par un trièdre orthonormé direct Oxyz, les équations

$$x-2 = y+1 = z-3$$

   sont celles d'une droite (D).
2. Démontrer que, dans le même repère, les équations 4t 1- 3t

$$x = \frac{4t}{t+1}, \quad y = \frac{1-3t}{t+1}, \quad \text{et} \quad z = \frac{2t+4}{t+1} \quad (t \neq -1)$$

   donnent les coordonnées d'un point se déplaçant sur une droite (Δ).
3. Montrer que les droites (D) et (Δ) ont un point commun.
4. Déterminer les composantes scalaires d'un vecteur $\overrightarrow{\text{V}}$ orthogonal au plan formé par (D) et (Δ).

EXERCICE 3

Soit un repère orthonormé $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$ et le cercle (C) de centre O, de rayon R.
On considère la transformation ponctuelle T qui, au point M$(x\,;\,y)$, fait correspondre le point M$'(x'\,;\,y')$, intersection de la parallèle menée de M à l'axe $y'\text{O}y$ et de la polaire de M par rapport au cercle (C).

1. Montrer que $x' = x$ et $y' = \dfrac{\text{R}^2 - x^2}{y}$.

   Définir la transformation réciproque T^{-1}. La transformation T est-elle involutive ?

   Déterminer ses points doubles, ainsi que les points qui ne possèdent pas d'homologues.

   Existe-t-il des droites globalement invariantes dans la transformation T ?
2. On suppose que l'ensemble des positions du point M est une parallèle à l'axe $x'\text{O}x$, d'équation $y = y_0$.

   Déterminer analytiquement l'ensemble des positions de M$'$, ainsi que le sommet, le paramètre, le foyer et la directrice du même ensemble.
3. Trouver géométriquement l'ensemble des points ω milieux des segments MM$'$. (On pourra étudier le comportement du cercle de diamètre MM$'$ dans l'inversion de pôle O et de puissance R^2.)

   En déduire, par une transformation ponctuelle connue, l'ensemble des points M$'$, déjà vu.

4. a et b étant des constantes, déterminer l'équation de la courbe (Γ) homologue de la droite d'équation $y = ax + b$ dans la transformation T. (On suppose $a \neq 0$.)

5. Cette équation peut se mettre sous la forme $y = f(x)$.
Étudier les variations de cette fonction et la représenter graphiquement en choisissant R = 3 cm, $a = 2, b = 4$ cm.

6. Dans ce dernier cas, mettre la fonction f sous la forme $y = \mathrm{A}X + \dfrac{\mathrm{B}}{X} + \mathrm{C}$, où X est de la forme $X = \alpha x + \beta$ et A, B, C, α et β étant des constantes.
En déduire une primitive de la fonction f de la variable x.