

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Montpellier juin 1966 ∞
Mathématiques et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Déterminer les modules et arguments respectifs des solutions de l'équation

$$z^4 = -i.$$

Représenter géométriquement leurs images respectives.

EXERCICE 2

1. Démontrer que, dans un repère constitué par un trièdre orthonormé direct $Oxyz$, les équations

$$x - 2 = y + 1 = z - 3$$

sont celles d'une droite (D).

2. Démontrer que, dans le même repère, les équations

$$x = \frac{4t}{t+1}, \quad y = \frac{1-3t}{t+1}, \quad \text{et} \quad z = \frac{2t+4}{t+1} \quad (t \neq -1)$$

donnent les coordonnées d'un point se déplaçant sur une droite (Δ).

3. Montrer que les droites (D) et (Δ) ont un point commun.
4. Déterminer les composantes scalaires d'un vecteur $\vec{V}$ orthogonal au plan formé par (D) et (Δ).

EXERCICE 3

Soit un repère orthonormé $x'Ox, y'Oy$ et le cercle (C) de centre O, de rayon R.

On considère la transformation ponctuelle T qui, au point $M(x; y)$, fait correspondre le point $M'(x'; y')$, intersection de la parallèle menée de M à l'axe $y'Oy$ et de la polaire de M par rapport au cercle (C).

1. Montrer que $x' = x$ et $y' = \frac{R^2 - x^2}{y}$.

Définir la transformation réciproque T^{-1} . La transformation T est-elle involutive?

Déterminer ses points doubles, ainsi que les points qui ne possèdent pas d'homologues.

Existe-t-il des droites globalement invariantes dans la transformation T?

2. On suppose que l'ensemble des positions du point M est une parallèle à l'axe $x'Ox$, d'équation $y = y_0$.
Déterminer analytiquement l'ensemble des positions de M' , ainsi que le sommet, le paramètre, le foyer et la directrice du même ensemble.
3. Trouver géométriquement l'ensemble des points ω milieux des segments MM' . (On pourra étudier le comportement du cercle de diamètre MM' dans l'inversion de pôle O et de puissance R^2 .)
En déduire, par une transformation ponctuelle connue, l'ensemble des points M' , déjà vu.
4. a et b étant des constantes, déterminer l'équation de la courbe (Γ) homologue de la droite d'équation $y = ax + b$ dans la transformation T. (On suppose $a \neq 0$.)
5. Cette équation peut se mettre sous la forme $y = f(x)$.
Étudier les variations de cette fonction et la représenter graphiquement en choisissant $R = 3$ cm, $a = 2$, $b = 4$ cm.
6. Dans ce dernier cas, mettre la fonction f sous la forme $y = AX + \frac{B}{X} + C$, où X est de la forme $X = \alpha x + \beta$ et A, B, C, α et β étant des constantes.
En déduire une primitive de la fonction f de la variable x .