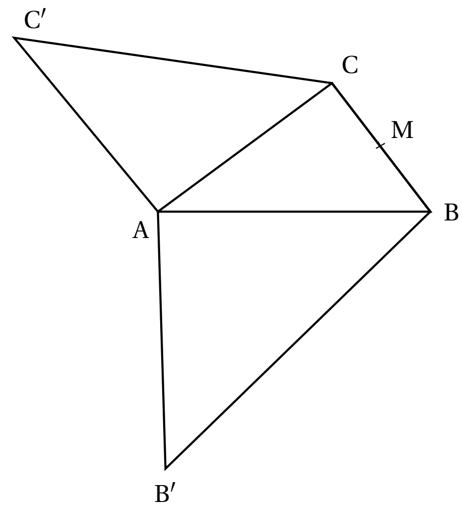
Durée : 4 heures

Baccalauréat C Montpellier [1] juin 1986

EXERCICE 1 **6 points**

Le triangle ABC est quelconque, M est le milieu du segment [BC].
Les triangles BAB′ et CAC′ sont rectangles et isocèles de sommet A.



Le but de l'exercice est de montrer que les droites (AM) et (B′C) sont perpendiculaires et que

$$B'C' = 2AM.$$

1. *Méthode géométrique*
   - **a.** Soit h l'homothétie de centre B et de rapport 2.
     Déterminer les images des points A et M par h.
     Trouver une rotation r telle que $r \circ h$ transforme A en B′ et M en C.
   - **b.** En déduire que les droites (AM) et (B′C′) sont perpendiculaires et que B′C′ = 2AM.
2. *Utilisation des nombres complexes*
   Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct d'origine A dans lequel B et C ont pour affixes respectives b et c.
   Quelles sont les affixes m, b', c' des points M, B′, C′ ?
   Retrouver alors les résultats du 1. b.

EXERCICE 2 **4 points**

On donne dans le plan deux points fixes distincts F et A. On considère les ellipses E dont un foyer est F et A le sommet de l'axe focal le plus voisin de F.

1. **a.** Quel est l'ensemble des points O centres des ellipses E ?
   b. Soit O un point de cet ensemble et soit D la perpendiculaire en O à la droite (AF). Construire (au moyen du compas seulement) les sommets B et B′ de l'ellipse E appartenant à D.

1. Aix-Marseille, Corse, Nice, Toulouse

2. **a.** Soit B un sommet du petit axe d'une ellipse E ; montrer que B appartient à une parabole P de foyer F dont on déterminera la directrice Δ.
   b. Déterminer la partie de P qui est l'ensemble des points B.

EXERCICE 3 **10 points**

Partie A

1. Étudier la fonction

$$\left\{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \end{array}\right.$$

Tracer sa courbe représentative C dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'x$, $y'y$.

2. Pour tout x réel on pose

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

   a. Justifier que F est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Calculer $F'(x)$. En déduire le sens de variation de F.
   b. Montrer que F est impaire.
   c. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

   Déduire de cette inégalité que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

3. x étant un réel quelconque, on pose

$$G(x) = F(2x) - F(x).$$

   a. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$. Étudier le sens de variation de G sur $\mathbb{R}$.
   b. Justifier l'affirmation suivante : pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant \frac{1}{x}.$$

   c. Déduire de a. et b. que l'on peut affirmer : pour tout x de $\mathbb{R}$

$$G(x) \leqslant \ln 2.$$

   [On écrira $G(x)$ à l'aide d'une seule intégrale).
   d. Déduire de a. et c. que l'on peut affirmer l'existence d'un réel L, limite quand x tend vers $+\infty$ de $G(x)$.
   e. Montrer que G est une (onction impaire.
   f. Déduire de d. et e. que $G(x)$ tend vers une limite quand x tend vers $-\infty$. Exprimer cette limite en fonction de L.

Partie B

On considère la fonction φ :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).\end{array}\right.$$

1. **a.** Déterminer l'ensemble de définition de la fonction φ.

   b. Calculer $\varphi'(x)$. Montrer alors que les fonctions F et φ sont égales.

   c. Déduire de b. une nouvelle écriture de $G(x)$ (introduit au 3. ci-dessus) et la valeur du réel L de la question A. 3. d.

2. On s'intéresse à la courbe représentative Γ de la fonction F dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

   a. Montrer que, pour x strictement positif, on peut écrire :

   $$F(x) = \ln 2x + \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2}\right).$$

   [On rappelle que, par 1. b. ci-dessus, $F(x) = \varphi(x)$.

   b. Étudier les branches infinies de Γ. Reconnaître d'éventuelles courbes asymptotes à Γ.

   c. Étudier la position de Γ par rapport à sa tangente à l'origine. (On pourra étudier la variation de h : x 1-+ F(x) ... ;. x). tI) Tracer Γ10.

3. En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire du domaine plan limité par Γ, l'axe $x'x$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie C

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = F\left(u_n\right).$$

1. Montrer par récurrence que les termes de (u_n) sont strictement positifs.
2. Calculer, à 10^{-4} près, les termes u_1, u_2, u_3, u_4 de la suite.
3. Montrer que (u_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge. Quelle est sa limite ?