

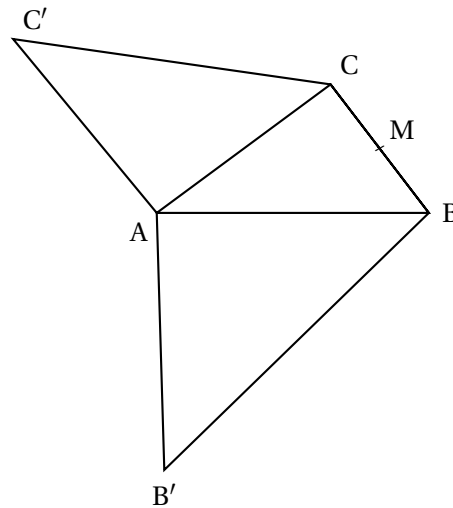
Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Montpellier¹ juin 1986 ∞

EXERCICE 1

6 points

Le triangle ABC est quelconque, M est le milieu du segment [BC].
Les triangles BAB' et CAC' sont rectangles et isocèles de sommet A.



Le but de l'exercice est de montrer que les droites (AM) et (B'C) sont perpendiculaires et que

$$B'C' = 2AM.$$

1. Méthode géométrique

- a. Soit h l'homothétie de centre B et de rapport 2.
Déterminer les images des points A et M par h .
Trouver une rotation r telle que $r \circ h$ transforme A en B' et M en C.
- b. En déduire que les droites (AM) et (B'C') sont perpendiculaires et que $B'C' = 2AM$.

2. Utilisation des nombres complexes

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct d'origine A dans lequel B et C ont pour affixes respectives b et c .

Quelles sont les affixes m, b', c' des points M, B', C'?

Retrouver alors les résultats du 1. b.

EXERCICE 2

4 points

On donne dans le plan deux points fixes distincts F et A. On considère les ellipses E dont un foyer est F et A le sommet de l'axe focal le plus voisin de F.

1. Aix-Marseille, Corse, Nice, Toulouse

1.
 - a. Quel est l'ensemble des points O centres des ellipses E?
 - b. Soit O un point de cet ensemble et soit D la perpendiculaire en O à la droite (AF). Construire (au moyen du compas seulement) les sommets B et B' de l'ellipse E appartenant à D.
2.
 - a. Soit B un sommet du petit axe d'une ellipse E; montrer que B appartient à une parabole P de foyer F dont on déterminera la directrice Δ .
 - b. Déterminer la partie de P qui est l'ensemble des points B.

EXERCICE 3**10 points****Partie A**

1. Étudier la fonction

$$\left\{ \begin{array}{l} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \end{array} \right.$$

Tracer sa courbe représentative C dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $x'x, y'y$.

2. Pour tout x réel on pose

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt.$$

- a. Justifier que F est définie sur \mathbb{R} et dérivable sur \mathbb{R} .
Calculer $F'(x)$. En déduire le sens de variation de F .
- b. Montrer que F est impaire.
- c. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt.$$

Déduire de cette inégalité que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

3. x étant un réel quelconque, on pose

$$G(x) = F(2x) - F(x).$$

- a. Montrer que G est dérivable sur \mathbb{R} . Étudier le sens de variation de G sur \mathbb{R} .
- b. Justifier l'affirmation suivante : pour tout x de \mathbb{R}_+^*

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{x}.$$

- c. Dédire de a. et b. que l'on peut affirmer : pour tout x de \mathbb{R}

$$G(x) \leq \ln 2.$$

[On écrira $G(x)$ à l'aide d'une seule intégrale].

- d. Dédire de a. et c. que l'on peut affirmer l'existence d'un réel L , limite quand x tend vers $+\infty$ de $G(x)$.
- e. Montrer que G est une (onction impaire).
- f. Dédire de d. et e. que $G(x)$ tend vers une limite quand x tend vers $-\infty$. Exprimer cette limite en fonction de L .

Partie B

On considère la fonction φ :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x + \sqrt{1+x^2}). \end{cases}$$

1.
 - a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction φ .
 - b. Calculer $\varphi'(x)$. Montrer alors que les fonctions F et φ sont égales.
 - c. Dédire de b. une nouvelle écriture de $G(x)$ (introduit au 3. ci-dessus) et la valeur du réel L de la question A. 3. d.
2. On s'intéresse à la courbe représentative Γ de la fonction F dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 - a. Montrer que, pour x strictement positif, on peut écrire :

$$F(x) = \ln 2x + \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{2} \right).$$

[On rappelle que, par 1. b. ci-dessus, $F(x) = \varphi(x)$.

- b. Étudier les branches infinies de Γ . Reconnaître d'éventuelles courbes asymptotes à Γ .
 - c. Étudier la position de Γ par rapport à sa tangente à l'origine. (On pourra étudier la variation de $h : x \mapsto F(x) - x$). t) Tracer Γ 10.
3. En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire du domaine plan limité par Γ , l'axe $x'x$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie C

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \text{ et} \\ u_{n+1} & = & F(u_n) \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que les termes de (u_n) sont strictement positifs.
2. Calculer, à 10^{-4} près, les termes u_1, u_2, u_3, u_4 de la suite.
3. Montrer que (u_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge. Quelle est sa limite?