∽ Montpellier juin 1967 ∾
Baccalauréat mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

On donne le nombre complexe

$$z = \sqrt{3} + 1 + \mathrm{i}\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

Calculer son carré, $Z = z^2$.
En déduire le module et l'argument de z.

EXERCICE 2

1. Qu'appelle-t-on barycentre du système de trois points de l'espace, A, B, C, respectivement affectés des coefficients 1, 2, 3 ?

   Application : On donne quatre points de l'espace, A, B, C et D. Déterminer géométriquement l'ensemble des points M tels que

   $$\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}} + 2\overrightarrow{M\mathrm{B}} + 3\overrightarrow{M\mathrm{C}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{M\mathrm{D}} + \overrightarrow{M\mathrm{A}}\right) = 0.$$

2. On suppose maintenant que les quatre points A, B, C et D ont pour coordonnées, dans un repère orthonormé d'origine O,

   $$\mathrm{A}(+2\,;\,-2\,;\,+3), \quad \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}\,;\,-2\,;\,-3\right), \quad \mathrm{C}(+3\,;\,0\,;\,-3), \quad \mathrm{D}(-4\,;\,+2\,;\,+3).$$

   Donner l'équation de l'ensemble des points M caractérisés comme précédemment.

EXERCICE 3

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O, on considère les deux points A(+ 1 ; 0) et B (+ 3 ; 0).
À tout point P du plan, non situé sur la droite AB, on fait correspondre le point M de coordonnées

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = b$$

a et b désignant les mesures des longueurs des segments PA et PB.

1. Préciser l'ensemble, E, des points M correspondant à tous les points P ainsi considérés. (On rappelle que trois nombres sont les mesures des côtés d'un véritable triangle si, et seulement si, chacun d'eux est strictement inférieur à la somme des deux autres.)
2. **a.** Préciser le lieu, (Δ), des points M pour lesquels le triangle APB est isocèle.

   b. Préciser le lieu, (R), des points M pour lesquels le triangle APB est rectangle.
3. Montrer que l'angle $\widehat{P\mathrm{AB}}$ est égal à $\frac{\pi}{3}$ si, et seulement si, x et y vérifient la relation

   $$y = 2\sqrt{x^2 - x + 1}.$$

   Étudier les variations de la fonction

$$y = f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1}.$$

et construire le lieu, (Y), des points M pour lesquels $\widehat{P\text{AB}} = \dfrac{\pi}{3}$. On étudiera la branche infinie de (Y).

4. Montrer que, si P appartient à un cercle (C) du faisceau à points limites A et B, le lieu de M est une portion de droite, que l'on précisera.

Cette portion de droite peut-elle être une demi-droite ?

5. Déterminer le lieu, (L_P), de M si le produit de longueurs $P\text{A} \,.\, P\text{B}$ a une valeur donnée, p.

Discuter la forme de (L_P) suivant les valeurs de p.