Baccalauréat mathématiques élémentaires Montréal et New York septembre 1964

EXERCICE 1

De combien de façons 2 personnes peuvent-elles occuper 6 sièges ?

EXERCICE 2

Trouver les nombres complexes

$$z = \rho\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

tels que

$$z^2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

EXERCICE 3

On donne un repère orthonormé $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$ et les points I et J appartenant à $x'\mathrm{O}x$ et d'abscisses $-a$ et $+a$ $(a > 0)$.

1. On appelle (C) tout cercle ayant comme extrémités d'un diamètre deux points, P et Q, conjugués harmoniques par rapport à I et J.

   Montrer que (C) est l'ensemble des points M tels que $\dfrac{\text{MI}}{\text{MJ}} = k$, k étant une constante, que l'on déterminera.
2. x et y étant les coordonnées de M, calculer MI, MJ, $\dfrac{\text{MI}}{\text{MJ}}$, $\dfrac{\text{MI}^2}{\text{MJ}^2}$ et en déduire que l'équation d'un cercle (C) est

$$x^2 + y^2 - 2a\frac{k^2+1}{k^2-1}x + a^2 = 0.$$

3. Quelle est l'abscisse du centre de (C) en fonction de k ?
   Étudier ses variations en fonction de k (k positif).
   Courbe représentative.
   En déduire le lieu du centre de (C).
4. Calculer les abscisses de P et Q ; en déduire $\overline{\text{PQ}}$ et PQ.
   On trouvera $z = \text{PQ} = \dfrac{4ak}{\left|k^2-1\right|}$.
5. Étudier les variations de z en fonction de k $(k > 0)$.
   Courbe représentative,