Baccalauréat C Montréal juin 1978

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Quel est le reste de la division euclidienne de 3 670 par 11 ?
2. Quel est le reste de la division euclidienne de 3 670 par 61 ?
3. Quel est le reste de la division euclidienne de 3 671 par 671 ?

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Dans un espace affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on considère l'application f, qui, à un point M de coordonnées $(x~;~y~;~z)$ fait correspondre le point M_1 de coordonnées $\left(x_1~;~y_1~;~z_1\right)$ où :

$$\left\{\begin{array}{l c l}
x_1 &=& \dfrac{1}{3}(-2x-2y+z+2)\\
y_1 &=& \dfrac{1}{3}(-2x+y-2z+3)\\
z_1 &=& \dfrac{1}{3}(x-2y-2z+4)
\end{array}\right.$$

Montrer que f est la symétrie orthogonale par rapport à une droite que l'on déterminera.

PROBLÈME **12 POINTS**

Le plan affine euclidien orienté (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. **a.** Soit A le point d'affixe $(3+\text{i})$ et B le point d'affixe 6. Pour tout réel u, on considère les deux points M_u d'affixe $3-\sin u+\text{i}\cos u$ et N_u d'affixe $3(1+\cos u)+3\text{i}\sin u$.

   Montrer qu'il existe une unique similitude directe T_u telle que

   $$T_u(\text{A}) = M_u \quad \text{et} \quad T_u(\text{B}) = N_u.$$

   b. Déterminer les éléments géométriques de T_u.

   c. Soit $E = \left\{T_{u,} \quad u \in \mathbb{R}\right\}$.

   Démontrer que $(E, \circ)$ est un groupe commutatif.

2. On pose $\text{B}_0 = \text{B}$, $\quad B_1 = T_{\frac{\pi}{2}}(\text{B})$, $\quad B_2 = T_{\frac{\pi}{2^2}}$,

   et $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\quad B_n = T_{\frac{\pi}{2^n}}\left(B_{n-1}\right)$.

   Calculer en fonction de n les coordonnées de B_n.

   Quelle est la position limite du point B_n quand n tend vers $+\infty$?

Partie B

Soit (C) le sous-ensemble de (P) d'équation

$$(y-8y+15)\text{e}^{y-3}+3-x=0$$

et soit (C_1) l'image de (C) par $T_{\frac{\pi}{2}}$.

1. Montrer que (C_1) a pour équation

$$y = \left(x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^{-x}$$

2. Soit f la fonction définie pour tout x réel par

$$f(x) = \left(x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^{-x}$$

a. Étudier le comportement de $x^2\mathrm{e}^{-x}$ quand x tend vers $+\infty$ (on pourra utiliser Log $\left(x^2\mathrm{e}^{-x}\right)$).

b. Étudier la fonction f.

Construire (C_1) dans le repère $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. On donne $\exp\left(\sqrt{2}\right) \approx 4,1$.

En déduire la construction de (C) dans le même repère.

3. a. Calculer $\displaystyle\int_0^x \left(t^2 + 2t\right)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

b. Soit m un nombre réel positif. Calculer l'aire de la portion de plan comprise entre (C) et les droites d'équation $x = 3,~y = 5,~y = 3 - m$ en intégrant par parties.

Cette aire a-t-elle une limite quand m tend vers $+\infty$?